

فصل پنجم

شبیه سازی مونت کارلو

مونت کارلو روشی است که از آن برای حل مسائل قطعی (غیرتصادفی) و یا برخی از مسائل غیرقطعی (تصادفی) که گذشت زمان نقشی اساسی در آنها ندارد استفاده میشود و در این روش از **اعداد تصادفی** استفاده میشود. این روش بر اساس فلسفه شرط بندی بوده و اولین بار توسط نیومن و اولام برای طراحی حفاظ مواد رادیواکتیو و دانستن اینکه نوترونها در مواد مختلف چگونه حرکت میکنند مورد استفاده قرار گرفت. مونت کارلو روشی **ایستا** است برخلاف روش شبیه سازی که پویا است هرچند در هر دورش از اعداد تصادفی استفاده میشود. اکثر مسائل شبیه سازی طبیعی تصادفی دارند در حالیکه مونت کارلو اغلب برای حل مسائل غیرتصادفی مورد استفاده قرار میگیرد. در روش مونت کارلو اعداد تصادفی ای استفاده می شود که راه حل مسئله را بدهند (محاسبه قطعی).

شبیه سازی تصادفی: محاسباتی که از اعداد تصادفی برای حل مسائل تصادفی استفاده میکنند. مثل: سیستم انبار

اعداد تصادفی: متغیرهای تصادفی یکنواخت و مستقل در بازه $[0,1]$

ایستا: عامل زمان در روش مونت کارلو دخالت ندارد.

ویژگی های روش مونت کارلو:

عمومی ترین روش تقریب احتمالات حالت های یک مدل با استفاده از نمونه های آزمایشی

تفکیک ثابت نمونه ها است و به جای آنکه تصویری از یک مدل ایجاد کند، همبستگی آماری بین ورودی ها و خروجی ها را بررسی میکند.

اشیاء سیستم بوسیله متغیرها ارائه میشوند و ارتباط بین آنها از طریق تکرار تولید اعداد تصادفی یا توزیع احتمالاتی اعداد برقرار میشود.

چه موقع از روش مونت کارلو استفاده میکنیم؟ وقتی راه حل های مدل های غیر احتمالاتی پیچیده و پرهزینه است از این روش استفاده میکنیم چون در آن به دنبال آنالیز نتایج نیستیم بلکه به دنبال همبستگی های آماری هستیم. به طور کلی در موارد زیر از روش مونت کارلو استفاده میکنیم:

الف) حل مسائل قطعی (غیر تصادفی) با استفاده از اعداد تصادفی

مثلاً میخواهیم مقدار $I = \int_a^b g(x)dx$ را حساب کنیم اما نمیتوان به روش تحلیلی مقدار انتگرال $g(x)$ را حساب کرد.

تعریف یک متغیر تصادفی: $y = (b - a)g(x)$ که در آن x یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه $[0, 1]$ است.

$$E(y) = E[(b - a)g(x)] = (b - a)E[g(x)] = (b - a) \int_a^b g(x)f(x)dx$$

تابع چگالی احتمال یعنی $f(x)$ را به صورت $\frac{1}{b-a}$ تعریف میکنیم. پس داریم:

$$E(y) = \int_a^b g(x)dx = I$$

3

پس مسئله برآورد I تبدیل شد به محاسبه امید ریاضی یک متغیر تصادفی، حالا میانگین نمونه را برای متغیر تصادفی y حساب میکنیم به صورت زیر:

$$\bar{y}(n) = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{(b-a)g(x_i)}{n} = \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i)$$

مثلاً اگر مستطیل هایی داشته باشیم که طول همه آنها $(b-a)$ باشد و عرض آنها $g(x_i)$ باشد، میانگین نمونه ها میشود همان $\bar{y}(n)$ و طبق فرمول داریم:

$$E(\bar{y}(n)) = \int_{i=1}^n \bar{y}(n) f(x) dx = \int_{i=1}^n \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i) \times \frac{1}{(b-a)} dx$$

$$E(\bar{y}(n)) = I$$

$$Var [\bar{y}(n)] = \frac{Var(y)}{n}$$

4 حالا چون $Var(y)$ ثابت است با بزرگ شدن n ، $Var [\bar{y}(n)]$ به صفر نزدیک میشود یعنی میتوان به طور دلخواه $y(n)$ را به I نزدیک کرد یعنی با استفاده از $y(n)$ مقدار I را تخمین زد.

ب) نمونه گیری از توزیع های آماری مجهول

هدف از این نمونه گیری، یافتن توزیع آماری یک یا چند متغیر تصادفی یا پارامترهای آن است. به متغیر تصادفی مورد نظر، **متغیر پاسخ** میگوییم که تابعی از یک یا چند متغیر تصادفی است. برای آنکه توزیع آماری متغیر پاسخ را تخمین بزنیم، برای همه متغیرهای تصادفی ورودی مقادیری را تولید میکنیم و مقدار متناظر متغیر پاسخ را بر اساس آنها محاسبه میکنیم. این نمونه گیری اینقدر تکرار میشود تا از توزیع آماری متغیر تصادفی تخمینی ایجاد شود.

مثال: برآورد تابع تقاضا در خلال مهلت تحویل در یک مسئله کنترل موجودی

کاربردهای شبیه سازی مونت کارلو

- (۱) حل یک مسئله تصادفی
- (۲) نمونه برداری از توزیع مجهول آماری
- (۳) حل یک مسئله قطعی (غیر تصادفی)

مثال (۱) حل یک مسئله تصادفی

در نظر بگیرید که هفته ثبت نام است و دانشجویان میخواهند با اساتید مشاوره داشته باشند و سوالات آموزشی خود را با اساتید در میان بگذارند. فرض کنید در زمان $t=0$ تعداد n دانشجو وقت ملاقات دارند و ورود بقیه در بازه های نیم ساعته زمانبندی میشود. زمان مراجعه نمایی و با میانگین ۳۰ دقیقه است.

سوال: زمانبندی ملاقات دانشجویان چگونه باشد تا بین زمان انتظار دانشجویان و زمان انتظار اساتید تعادل برقرار گردد؟
فرض کنید دانشجویانی که در صف انتظار قرار میگیرند با روش *FIFO* پاسخگویی میشوند.

حل) برای $n=1$ و $n=2$ پروسه شبیه سازی را انجام میدهیم.

X = متغیر تصادفی با توزیع نمایی و میانگین ۱۰۰

S_{arr} = زمان ورود یک دانشجو مطابق با قرار ملاقات است که از یک عدد تصادفی برای تولید زمان ورود استفاده میشود.

T_{beg} = زمان شروع مشورت دانشجو

T_{end} = زمان خاتمه مشورت دانشجو

CT = زمان گفتگو برای مشاوره که نمایی است و با میانگین ۳۰ دقیقه پس عبارت است از: $CT = \frac{30}{100} X$

از آنجا که طبق فرض مسئله دانشجویان به روش *FIFO* پاسخگویی میشوند پس داریم:

$$T_{end} = T_{beg} + CT$$

اگر تعداد دانشجویان را ۱۰ نفر در نظر بگیریم برای $n=1$ و $n=2$ داریم:

جدول ۶-۱) نتایج شبیه سازی برای دو آزمایش

		n=1					n=2		
شماره دانشجو	S_{arr}	T_{beg}	X	$CT = \frac{30}{100} X$	$T_{end} = T_{beg} + CT$	انتظار دانشجو	S_{arr}	T_{end}	انتظار دانشجو
۱	۰	۰	۱۹۹	۶۰	۶۰	۰	۰	۶۰	۰
۲	۳۰	۶۰	۲۸۶	۸۶	۱۴۶	۳۰	۰	۱۴۶	۶۰
۳	۶۰	۱۴۶	۵۵	۱۷	۱۶۳	۸۶	۳۰	۱۶۳	۱۱۶
۴	۹۰	۱۶۳	۲۸۰	۸۴	۲۴۷	۷۳	۶۰	۲۴۷	۱۰۳
۵	۱۲۰	۲۴۷	۸	۲	۲۴۹	۱۲۷	۹۰	۲۴۹	۱۵۷
۶	۱۵۰	۲۴۹	۱۸۶	۵۶	۳۰۵	۹۹	۱۲۰	۳۰۵	۱۲۹
۷	۱۸۰	۳۰۵	۷۷	۲۳	۳۲۸	۱۲۵	۱۵۰	۳۲۸	۱۵۵
۸	۲۱۰	۳۲۸	۸۱	۲۴	۳۵۲	۱۱۸	۱۸۰	۳۵۲	۱۴۸
۹	۲۴۰	۳۵۲	۱۲۷	۳۸	۳۹۰	۱۱۲	۲۱۰	۳۹۶	۱۴۸
۱۰	۲۷۰	۳۹۰	۳۸	۱۱	۴۰۱	۱۲۰	۲۴۰	۴۰۱	۱۵۰
	۱۳۵۰			$\sum CT = ۴۰۱$	۲۶۴۱	۸۹۰	۱۰۸۰	۲۶۴۷	۱۱۶۶

زمان انتظار اساتید:

$$T_{end} - \sum CT$$

زمان انتظار دانشجویان:

$$\sum T_{end} - (\sum S_{arr} + \sum CT)$$

	زمان انتظار اساتید	زمان انتظار دانشجویان
n=1	401-401=0	2641-1350-401=890
n=2	401-401=0	2647-1080-401=1166

معرفی یک روش تقلیل واریانس برای این مسئله:

$N1$: متغیر تصادفی زمان انتظار برای $n=1$

$\bar{N}1$: میانگین تقریب $N1$

همان طور که ملاحظه میکنید بین زمان انتظار دانشجویان و اساتید تعادلی وجود ندارد. برای یافتن راه حل لازم است ابتدا با روش کاهش واریانس آشنا شویم. اساس این روش به کارگیری دانش و اطلاعات مربوط به ساختار مدل و خواص ورودی هاست به نحوی که مسئله اصلی به شکلی تغییر پیدا کند که بتوان برای آن برآوردهای مطلوبی به کار برد و دقت را افزایش داد.

N_2 : متغیر تصادفی زمان انتظار برای $n=2$

$\bar{N}_2$: میانگین تقریب N_2

اختلاف L و تقریب میانگین دو وضعیت میشود: $\bar{D} = \bar{N}_1 - \bar{N}_2$

❖ تقلیل واریانس وقتی مهم است که دو حالت را مقایسه می کنیم چون میخواهیم تقریب اختلاف نسبی $\bar{D}$ را از قدرمطلق $\bar{N}_1$ و $\bar{N}_2$ تعیین کنیم.

اگر از دو توالی تصادفی برای یافتن N_1 و N_2 استفاده کنیم، آنگاه واریانس به صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma^2[D] = \sigma^2[N_1] + \sigma^2[N_2]$$

اگر از توالی اعداد تصادفی یکسان برای هر دو استفاده کنیم، آنگاه هر دو وضعیت تحت شرایط یکسان مقایسه میشوند. با استفاده از اعداد تصادفی یکسان برای هر دو، می توان همبستگی بین متغیرهای تصادفی N_1 و N_2 را تشخیص داد.

حال متغیر تصادفی D^* را تقریب میزنیم که میانگینش برابر میانگین D است یعنی: $\bar{D}^* = \bar{D}$

و واریانسش عبارتست از: $\sigma^2[D^*] = \sigma^2[N_1] + \sigma^2[N_2] - 2\sigma^2[N_1, N_2]$

وقتی N_1 و N_2 همبستگی دارند، $\sigma^2[D] < \sigma^2[D^*]$ است.

برای تولید Y از سری متقابل با توزیع نمایی استفاده میکنیم. به این دلیل از سری متقابل استفاده میکنیم چون اثر تغییر روی میانگین از اثر تغییر در شبیه سازی بهتر است.

جدول ۶-۲) نتایج شبیه سازی با سری های متقابل

		$n=1$					$n=2$		
شماره دانشجو	S_{arr}	T_{beg}	Y	$CT = \frac{30}{100} Y$	$T_{end} = T_{beg} + CT$	انتظار دانشجو	S_{arr}	T_{end}	انتظار دانشجو
۱	۰	۰	۱۵	۵	۵	۰	۰	۵	۰
۲	۳۰	۳۰	۶	۲	۳۲	۰	۰	۷	۵
۳	۶۰	۶۰	۵	۲	۶۲	۰	۳۰	۳۲	۰
۴	۹۰	۹۰	۸۶	۲۶	۱۱۶	۰	۶۰	۸۶	۰
۵	۱۲۰	۱۲۰	۶	۲	۱۲۲	۰	۹۰	۹۲	۰
۶	۱۵۰	۱۵۰	۲۵۳	۷۶	۲۲۶	۰	۱۲۰	۱۹۶	۰
۷	۱۸۰	۲۲۶	۱۷	۵	۲۳۱	۴۶	۱۵۰	۲۰۱	۴۶
۸	۲۱۰	۲۳۱	۶۲	۱۹	۲۵۰	۲۱	۱۸۰	۲۲۰	۲۱
۹	۲۴۰	۲۵۰	۵۹	۱۸	۲۶۸	۱۰	۲۱۰	۲۳۸	۱۰

۱۰	۲۷۰	۲۷۰	۳۳	۱۰	۲۸۰	۰		۲۴۰	۲۵۰	۰
	۱۳۵۰			$\sum CT = ۱۶۵$	۱۵۹۲	۷۷		۱۰۸۰	۱۳۲۷	۸۲

	زمان انتظار اساتید	زمان انتظار دانشجویان
n=1	$280-165=115$	$1592-165-1350=77$
n=2	$250-165=85$	$1327-165-1080=82$

خلاصه هر دو شبیه سازی به وسیله سری میانگین:

	انتظار اساتید	انتظار دانشجویان
n=1	$(0+115)/2=57.5$	$(890+77)/2=483.5$
n=2	$(0+85)/2=42.5$	$(1159+82)/2=620.5$

اگر بخواهیم به مقدار مطمئنی برای n برسیم باید آزمایشات زیادی انجام بدهیم. با زبانهای شبیه سازی عمومی مانند *GPSS*، *SIMSCRIPT*، *SLAM*، *SIMAN* یا *GASP* میتوان چندین بار شبیه سازی را اجرا کرد و مقداری برای n مورد نظر پیدا کرد.

❖ روش تقلیل واریانس از تکرار آزمایشات شبیه سازی میکاهد و به سری های تصادفی مورد نظر معطوف میشود.

تقلیل واریانس

برای جلوگیری از تکرار شبیه سازی در رسیدن به پاسخ مورد نظر، از روش تقلیل انحراف معیار جهت تولید تصادفی ها استفاده می کنیم.

مثلاً در مثال قبلی از سری های متقابل و محاسبه میانگین هر دو جفت آزمایش استفاده کردیم. از سری متقابل استفاده شد چون اثر تغییر بر روی میانگین مهم تر از اثر تغییر بر روی شبیه سازی است.

۲ روش تقلیل واریانس:

۱- استفاده از سری های متقابل

۲- استفاده از اعداد تصادفی در وضعیت های مرتبط

روش تقلیل واریانس از تکرار آزمایشات شبیه سازی میکاهد و معطوف به سری های تصادفی مورد نظر میشود.

مثال ۲: استفاده از سری متقابل مولد اعداد تصادفی

سیستم صف مثال ۱ را در نظر بگیرید که ۱۰ بار شبیه سازی شده است و زمان کل سیستم یعنی از زمان ورود تا خروج این ۱۰ بار شبیه سازی به صورت زیر میباشد:

۱۲۷ ۸۱ ۷۷ ۱۸۶ ۸ ۲۸۰ ۵۵ ۲۹۴ ۲۸۶ ۱۹۹

میانگین این زمان ها: ۱۵۹/۳

واریانس آن: ۱۰۴/۷۶

کل زمان سیستم وقتی از سری متقابل مولد اعداد تصادفی استفاده میکنیم:

۱۱۵ ۳۳ ۵۹ ۶۲ ۱۷ ۲۵۳ ۸۵ ۵ ۶ ۱۵

میانگین این زمان ها: ۶۵

واریانس آن: ۷۵/۴۲

کاربرد دوم شبیه سازی مونت کارلو) نمونه برداری از توزیع مجهول آماری

در هر سیستم کنترل موجودی که مهلت تحویل کالا صفر نباشد، تقاضای طی مهلت تحویل کالا میتواند مطرح گردد. مهلت تحویل از لحظه صدور سفارش تا لحظه دریافت کالا طول میکشد. میتوان مهلت تحویل کالا را یک متغیر تصادفی در نظر گرفت و تغییرات تقاضای طی مهلت تحویل کالا طبیعتی تصادفی داشته باشد.

اگر مهلت تحویل کالا T واحد زمان طول بکشد و تقاضا در i امین واحد زمان برابر D_i باشد ($i = 0, 1, 2, \dots, T$)، مهلت تحویل کالا با T و تقاضای مهلت تحویل با $\sum_{i=0}^T D_i$ مشخص میشود. برای تعیین توزیع آماری تقاضای طی مهلت تحویل کالا، میتوان به دفعات بسیار به شبیه سازی مهلت تحویل دوره های مختلف انبار پرداخت و بر اساس نتایج حاصل، نمودار متواتر آن را رسم کرد.

مثال ۳) موسسه ای به فروش کاغذ روزنامه به صورت عدلی اشتغال دارد. توزیع آماری تقاضای روزانه به شرح زیر است:

تقاضای روزانه	۳	۴	۵	۶
احتمال	۰,۲	۰,۳۵	۰,۳	۰,۱۵

با استفاده از شبیه سازی مونت کارلو یک نمونه تصادفی از یک توزیع آماری نامشخص را ایجاد و به این وسیله توزیع آماری مربوطه را مورد بررسی و مطالعه و قرار میدهیم.

طول مهلت تحویل کالا بر حسب روز بیان میشود و توزیع آماری آن عبارتست از:

تأخیر تحویل (روز)	۱	۲	۳
احتمال	۰,۳۶	۰,۴۲	۰,۲۲

جدول ۶-۳) تخصیص اعداد تصادفی جهت تقاضا

تقاضای روزانه	احتمال	احتمال تجمعی	اعداد تصادفی
۳	۰,۲	۰,۲	۱-۲۰
۴	۰,۳۵	۰,۵۵	۲۱-۵۵
۵	۰,۳	۰,۸۵	۵۶-۸۵
۶	۰,۱۵	۱	۸۶-۱۰۰

جدول ۶-۴) تخصیص اعداد تصادفی جهت مهلت تحویل کالا

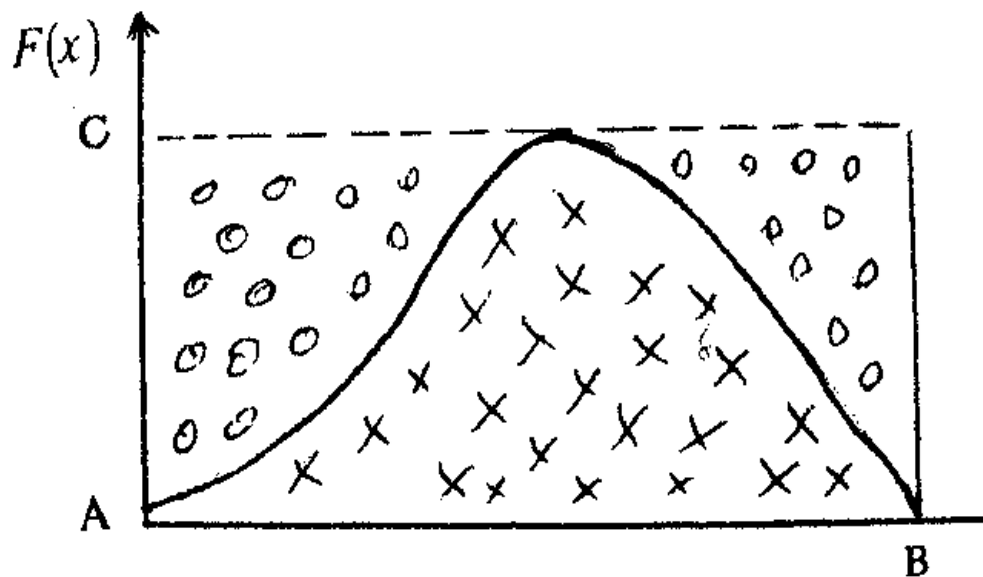
زمان تأخیر (روز)	احتمال	احتمال تجمعی	اعداد تصادفی
۱	۰,۳۶	۰,۳۶	۱-۳۶
۲	۰,۴۲	۰,۷۸	۳۷-۷۸
۳	۰,۲۲	۱	۷۹-۱۰۰

در اولین دوره بازرسی انبار عدد تصادفی ۵۷ تولید شده است. ۵۷ در بازه [۳۷-۷۸] قرار دارد پس مهلت تحویل کالا ۲ روزه است. گفتیم از زمان صدور سفارش تا تحویل کالا به انبار تقاضا میرسد، که در اینجا میشود دو بار تقاضا (چون ۲ روزه است)، پس ۲ تا عدد تصادفی جهت تقاضاها تولید میکنیم، مثلاً ۸۷ و ۳۴؛ ۸۷ در بازه [۸۶-۱۰۰] است و ۳۴ در بازه [۲۱-۵۵] که یعنی به ترتیب ۶ و ۴ تقاضا که جمعاً میشود ۱۰ تقاضا یعنی طبق $\sum_{i=0}^T D_i$ داریم $۱۰ = ۴ + ۶$ که زمان تأخیر تقاضا است. به طور مشابه برای دوره های بعدی انبار هم همین شبیه سازی را خواهیم داشت. لذا مشابه جدول زیر داریم:

زمان تأخیر	تقاضا	عدد تصادفی برای تقاضا	زمان تأخیر	عدد تصادفی مهلت تحویل	دوره انبار
۱۰	۶	۸۷	۲	۵۷	۱
	۴	۳۴			
۵	۵	۸۲	۱	۳۳	۲
۱۲	۴	۲۸	۳	۹۳	۳
	۳	۱۹			
	۵	۶۳			
۱۰	۶	۹۱	۲	۵۵	۴
	۴	۲۶			
ادامه دارد...					

کاربرد سوم شبیه سازی مونت کارلو (حل یک مسئله قطعی (غیر تصادفی)

مثال ۴) تقریب مساحت یک ناحیه با روش مونت کارلو (از روش حذفی استفاده میکند). مساحت ناحیه مجهول باید در ناحیه‌ای با مساحت معلوم محاط گردد. (تابع چگالی بتا)



شکل ۶-۱) تولید یکنواخت نقاط تصادفی در مستطیل با مساحت $(C(B-A))$

برای تولید اعداد تصادفی یکنواخت در این ناحیه چه پیشنهادی دارید؟

پیشنهاد کتاب: هر نقطه ای برای آنکه در این ناحیه باشد باید طول آن نقطه بین A تا B و عرض آن بین 0 تا C باشد، پس در واقع باید نقاط به مختصات $(U_1(B - A) + A, U_2(C))$ تولید کنیم که در آن U_1 و U_2 اعداد تصادفی بین صفر و یک هستند که از یکدیگر مستقلند. از نقاط تولید شده، آنهایی که بالای تابع چگالی قرار دارند را حذف میکنیم و بقیه نقاط را بعنوان مقادیر تصادفی از توزیع آماری X قبول میکنیم.

مساحت مستطیل این شکل برابر است با $C(B-A)$

مساحت زیر منحنی تابع چگالی احتمال هم برابر است با ۱

احتمال آنکه نقطه تولید شده در زیر منحنی قرار بگیرد برابر میشود با $\frac{1}{C(B-A)}$

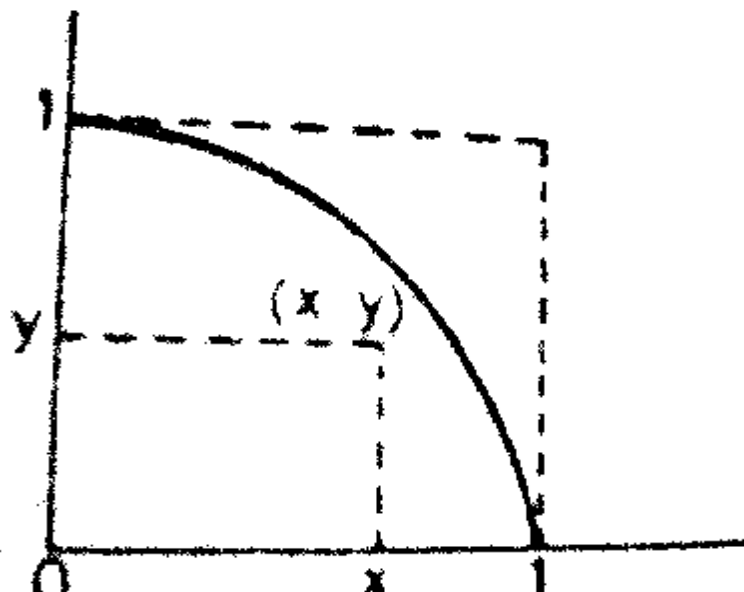
واضح است که هرچه C کوچکتر باشد احتمال اینکه نقطه تولید شده در این ناحیه قرار بگیرد بیشتر میشود.

اگر تعداد نقاط داخل مستطیل N و تعداد نقاط داخل منحنی n باشد، آنگاه نسبت $\frac{n}{N}$ تقریباً برابر میشود با نسبت

مساحت های این دو ناحیه یعنی $\frac{n}{N} \cong \frac{\int_A^B f(x)dx}{C(B-A)}$ پس با یک طرفین در وسطین ساده خواهیم داشت:

$$\int_A^B f(x)dx = \frac{n \times C(B-A)}{N}$$

تمرین با استفاده از روش مونت کارلو و فرض مثال قبلی، مساحت ربع دایره‌ای به شعاع ۱ را محاسبه کنید.



شکل ۶-۲ حل مونت کارلو از π

نمونه سوالات امتحان (مونت کارلو):

۱- روش مونت کارلو یک روش برای شبیه سازی شمرده میشود.

الف) پویا ب) ایستا ج) تصادفی د) همه موارد

۲- در مورد روش شبیه سازی مونت کارلو کدامیک از جملات زیر صحیح نمی باشد؟

الف) برای حل مسائل غیرتصادفی میتوان از آن استفاده کرد.

😊 ب) یک روش پویا است.

ج) برای حل مسائلی که در آنها زمان نقش اساسی ندارد، استفاده می شود.

د) در مقابل این روش میتوان شبیه سازی را قرار داد.

۳- کدامیک از موارد زیر، جزء کاربردهای مونت کارلو محسوب میشود؟

الف) حل مسائل تصادفی که گذشت زمان نقش اساسی در آنها ندارد.

ب) حل مسائل غیرتصادفی با استفاده از اعداد تصادفی

ج) نمونه گیری از توزیع های آماری مجهول

😊 (د) همه موارد فوق

۴- روش شبیه سازی مونت کارلو زیرمجموعه اصلی کدامیک از انواع مدل‌های شبیه سازی است؟
الف) مدل‌های آماری ب) مدل‌های پویا ج) مدل‌های تصادفی د) مدل‌های ایستا

۵- از شبیه سازی مونت کارلو در کجاها استفاده میشود؟

الف) در مسائل غیرتصادفی

ب) در مسائل پویا

ج) در مسائل تصادفی که گذشت زمان هیچ نقش اساسی در آنها نداشته باشد.

😊 (د) در مسائل غیرتصادفی و مسائل تصادفی که گذشت زمان هیچ نقش اساسی در آنها نداشته باشد.

۶- کدامیک از روش‌های نمونه برداری برای تقلیل واریانس استفاده نمیشود؟

😊 الف) نمونه برداری تصادفی ب) نمونه برداری متقابل

ج) نمونه برداری همبسته د) نمونه برداری نفوذی