

حلبه دوم، ریاضی مختصه

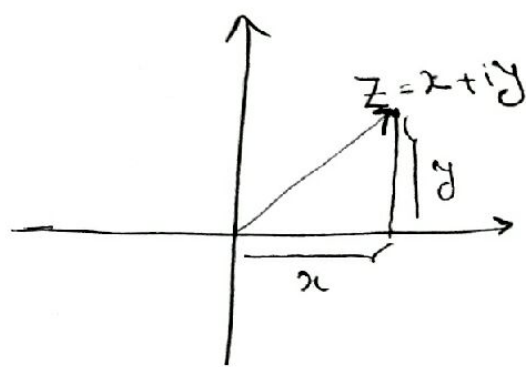
توصیف هندسی اعداد مختلط

مانند توصیف اشیاء هر عدد مختلط $Z = x + iy$ از دو جهت حقیقی و موهومی تشکیل شده است

بنابراین نمایش هندسی هر عدد مختلط به دو محور نیاز دارد که همان دستگاه مختصات است. پس

مستطیقا هر عدد مختلط $Z = x + iy$ زوج مرتب (x, y) دارد و همه اعداد در نظریه ابرم

مستطیقا هر زوج مرتب یک عدد مختلط را نمایش میدهد و برعکس.



مثال: نمایش هندسی

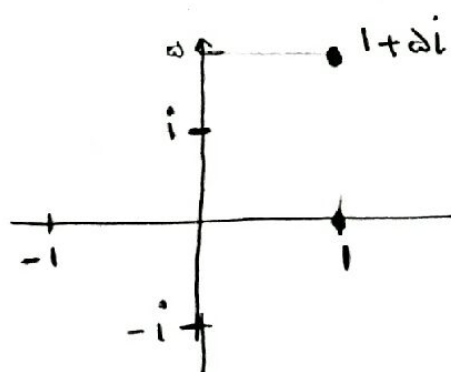
$$1 + 5i \approx (1, 5)$$

$$1 = (1, 0)$$

$$i = (0, 1)$$

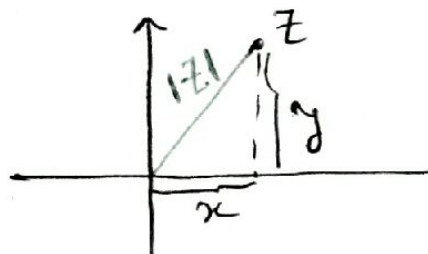
$$2 - 3i = (2, -3)$$

$$-i = (0, -1)$$



دقت داشته باشید ⁹معمولاً قدر مطلق آن را فاصله نامیدایم باشد بنابراین

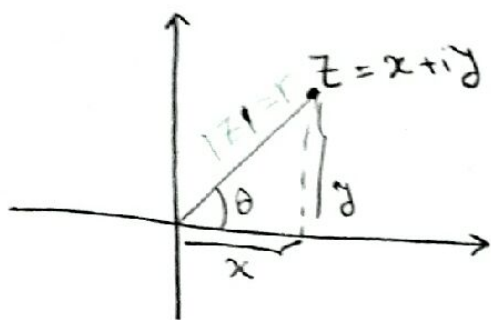
اگر $Z = x + iy$ عدد مختلط دلخواه باشد آن طاقه



$$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

فاصله موهومی

اگر $Z = x + iy$ عدد مختلط دلخواه باشد و فرض کنیم $|Z| = r$ ، θ زاویه باشد که بردار Z با جهت مثبت محور x ها ساز



در این صورت در مثل قائم الزامه مسافته شده ی داریم

$$\cos \theta = \frac{\text{مطلع جاور}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{\text{مطلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \sin \theta$$

ببرقیه فیثاغورث $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\tan \theta = \frac{\text{مطلع مقابل}}{\text{جاور}} = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

ی داریم $Z = x + iy$

عبارت متلاقی یا قطبی $Z = r \cos \theta + i r \sin \theta = r (\cos \theta + i \sin \theta) = r \text{Cis } \theta$

ی توان است کرد که $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$ فرمول اویلر

$$Z = r e^{i\theta}$$

این عبارت را عبارت متلاقی یا قطبی Z می نامند

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad r \geq 0$$

θ را آرگومان Z می نامند و به صورت $\theta = \text{Arg } Z$ عبارت می دهیم.

مثال: نمایش قطبی یا مثلثی اعداد مختلط زیر را بنویسید

$$1 \begin{cases} r=1 \\ \theta=0 \end{cases} = 1e^{i0}$$

$$i \begin{cases} r=1 \\ \theta=\frac{\pi}{2} \end{cases} = 1e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$-i \begin{cases} r=1 \\ \theta=-\frac{\pi}{2} \text{ یا } \frac{3\pi}{2} \end{cases} = 1e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

$$1+i \begin{cases} r=\sqrt{2} \\ \theta=\frac{\pi}{4} \end{cases} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$1-i \begin{cases} r=\sqrt{2} \\ \theta=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4} \end{cases} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

$$1-\sqrt{3}i \begin{cases} r=2 \\ \theta=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3} \end{cases} = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

$$-1+\sqrt{3}i \begin{cases} r=2 \\ \theta=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3} \end{cases} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

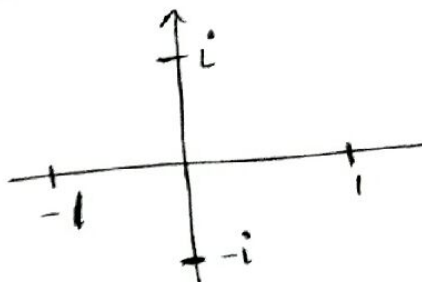
$$-\sqrt{3}-i \begin{cases} r=2 \\ \theta=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4} \end{cases} = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$-1-i \begin{cases} r=\sqrt{2} \\ \theta=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4} \end{cases} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$-2+2i \begin{cases} r=2\sqrt{2} \\ \theta=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4} \end{cases} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

برای بدست آوردن θ به جدول زیر دقت فرمایید

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞



$\pi-\theta$	θ
$\pi+\theta$	$2\pi-\theta$

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

اگر $Z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ و $Z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ دو عدد مختلط داشته باشیم آن وقت

$$Z_1 \cdot Z_2 = (r_1 e^{i\theta_1}) (r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Arg}(Z_1 \cdot Z_2) = \text{Arg } Z_1 + \text{Arg } Z_2}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \Rightarrow \boxed{\text{Arg}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \text{Arg}(Z_1) - \text{Arg } Z_2}$$

اگر $Z = r e^{i\theta}$ باشد آن وقت

$$Z^n = (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} \Rightarrow \boxed{\text{Arg}(Z^n) = n \text{Arg } Z}$$

برای تابع آوان دارای خواص ~~لگاریتم~~ می باشد: همین

$$\boxed{\text{Arg } \bar{Z} = -\text{Arg } Z}$$

$$\boxed{e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta} \quad (\text{دکمه})$$

$$\boxed{(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta} \quad \text{همواره دقت داشته باشید}$$

این رابطه به فرمول دیوایر معروف است.

مثال: حاصل $(1+i)^{100}$ را بدست آورید.

ابتدا عدد مورد نظر را به صورت قطبی یا نمایی بنویسیم

$$1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow (1+i)^{100} = (\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}})^{100} = 2^{50} e^{i 100 \cdot \frac{\pi}{4}} = 2^{50} e^{i 25\pi}$$

$$= 2^{50} (\cos 25\pi + i \sin 25\pi) = -2^{50}$$

$$\frac{(-1-i)^{50}}{(\sqrt{3}-i)^{25}} \text{ را بدست آورید}$$

سوال: حاصل

$$-1-i = \sqrt{2} e^{i \frac{5\pi}{4}}$$

$$(-1-i)^{50} = (\sqrt{2} e^{i \frac{5\pi}{4}})^{50} = 2^{25} e^{i 25 \cdot \frac{5\pi}{4}} = 2^{25} e^{i 125 \frac{\pi}{4}}$$

$$= 2^{25} \left(\cos 125 \frac{\pi}{4} + i \sin 125 \frac{\pi}{4} \right) = i 2^{25} \quad \text{با فرمول اویلر}$$

$$(\sqrt{3}-i)^{25} = \left(2 e^{i \frac{\pi}{4}} \right)^{25} = 2^{25} e^{-i 25 \frac{\pi}{4}} = 2^{25} \left(\cos 25 \frac{\pi}{4} - i \sin 25 \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= 2^{25} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2^{25} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{(-1-i)^{50}}{(\sqrt{3}-i)^{25}} = \frac{i 2^{25}}{2^{25} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right)} = \frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}} \times \frac{\text{مردم خنثی}}{\text{مردم خنثی}}$$

$$= \frac{2i}{\sqrt{3}-i} \times \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{2i(\sqrt{3}+i)}{4} = \frac{2i\sqrt{3}-2}{4}$$

$$= \frac{i\sqrt{3}-1}{2}$$

ریشه اعداد مختلط

$$Z = \sqrt[n]{w} \quad w = re^{i\theta}$$

$$Z = re^{i\theta}$$

$$Z = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}}$$

آن نگاه می توان است کرد که

$$k=0, 1, 2, \dots, n-1$$

(واقعاً n ریشه بدست می آید)

مثال: ریشه های n عدد صحیح n را بیابید.

$$i = \sqrt[n]{1} e^{i \frac{\pi}{n}}$$

حل: ابتدا n را به صورت قطبی بنویسیم.

$$Z = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{1} e^{i \frac{0 + 2k\pi}{n}} \quad k=0, 1, 2, 3$$

$$k=0 \Rightarrow Z_0 = e^{i \frac{\pi}{n}}$$

$$k=1 \Rightarrow Z_1 = e^{i \frac{3\pi}{n}}$$

$$k=2 \Rightarrow Z_2 = e^{i \frac{5\pi}{n}}$$

$$k=3 \Rightarrow Z_3 = e^{i \frac{7\pi}{n}}$$

مثال: معادله $Z^4 = 1 + i$ را حل کنید.

حل: ابتدا $1 + i$ را به صورت قطبی بنویسیم.

$$1 + i = \sqrt[4]{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow Z = \sqrt[4]{r} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}} = \sqrt[4]{2} e^{i \frac{0 + 2k\pi}{4}} = \sqrt[4]{2} e^{i \frac{2k\pi}{4}}$$

$$k=0, 1, 2, 3$$

مثال: معادله $Z^4 = -1$ را حل کنید.

$$-1 = \sqrt[4]{1} e^{i \pi}$$

بنابراین

$$Z = \sqrt[4]{r} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}}$$

$$Z = \sqrt[4]{1} e^{i \frac{\pi + 2k\pi}{4}} \quad k=0, 1, 2, 3$$

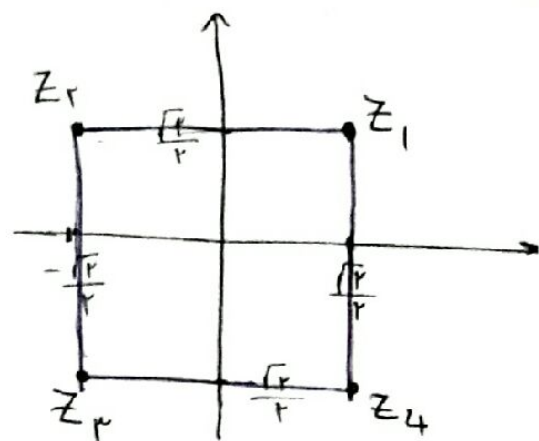
$$k=0 \Rightarrow Z_0 = e^{i \frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k=1 \Rightarrow Z_1 = e^{i \frac{3\pi}{4}} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k=2 \Rightarrow Z_2 = e^{i \frac{5\pi}{4}} = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k=3 \Rightarrow Z_3 = e^{i \frac{7\pi}{4}} = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ریشه‌های یکم، دوم، سوم و چهارم ریشه یکم در یک دایره



ریشه یکم مربعی است.

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = 0$$

نکته ۱: ریشه‌های n ام هر عدد مختلط، ریشه یکم n ضلعی منتظم است.

نکته ۲: مجموع ریشه‌های n ام هر عدد مختلط همواره برابر ۰ است.

نوعی در صفحه اعداد مختلط

برای پیدا کردن آنکه هر معادله در اعداد مختلط نشان دهنده مجموعه‌ای از نقاط طاقی است به جای Z مقدار دلخواه $x+iy$ را قرار داده معادله را ساده کرده به عبارتی مرتب x را رسم.

مثال: هر معادله به صورت $|Z - Z_0| = r$ نشان دهنده دایره به مرکز Z_0 و شعاع r است.

$ Z + i = 2$ دایره به مرکز $-i$ - شعاع ۲	$ Z = 3$ دایره به مرکز مبدأ شعاع ۳
$ Z - (1+2i) = 1$ دایره به مرکز $1+2i$ - شعاع ۱	$ Z - 2 = 1$ دایره به مرکز ۲ - شعاع ۱
	$ Z = 1$ دایره به مرکز مبدأ شعاع ۱

مثال: کون سی راسیڈ، $\left| \frac{z+1}{z-1} \right| < 1$

حل:

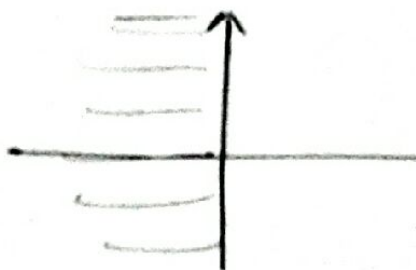
$$\frac{|z+1|}{|z-1|} < 1 \Rightarrow |z+1| < |z-1|$$

$$\Rightarrow |x+iy+1| < |x+iy-1| \Rightarrow |(x+1)+iy| < |(x-1)+iy|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + y^2} < \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + y^2 < (x-1)^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 < x^2 - 2x + 1 + y^2$$

$$\Rightarrow 2x + 2x < 0 \Rightarrow 4x < 0 \Rightarrow x < 0$$



• رسیدہ کردہ کہ اہم نم حوالہ داند

جان لاند ہیں میر حوالہ داند