معادلات دیفرانسیل مرتبه اول و دوم و بالاتر

«فهرست مطالب»

عنوان :

فصل سوم : معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر

۳ . ۱) معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی

۳ . ۲) معادلات همگن با ضرایب ثابت

۳ . ۳) روش ضرایب نامعین

۳ . ۴) روش عملکردهای معکوس.

۳ . ۵) معادله اویلر.

۳ . ۶) استفاده از یک جواب مشخص جهت یافتن جواب دیگر

۳ . ۷) روش تغییر پارامترها.

۳ . ۸) قضیه آبل.

۳ . ۹) شکل نرمال معادله مرتبه دوم.

۳ . ۱۰) روش کاهش مرتبه.

«معادلات دیفرانسیل»

«فصل اول»

مرتبه اول و دوم و بالاتر

۱ . ۱) مقدمه :

معادله دیفرانسیل معادله ای است که شامل مشتقات اول یا بالاتر باشد معادلات دیفرانسیل به دو دسته تقسیم می شوند : معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل جزئی یا پاره ای.

معادلات دیفرانسیل معمولی شامل مشتقات معمولی بوده و دارای یک متغیر مستقل هستند.

معادلات دیفرانسیل پاره ای شامل مشتقات جزئی یا پاره ای بوده و دارای بیش از یک متغیر مستقل هستند.

شکل کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه nام معمولی به صورت زیر است :

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

۱ . ۲) مرتبه، درجه و نوع معادله دیفرانسیل :

مرتبه : مرتبه بالاترین مشتق بوجود در معادله دیفرانسیل را مرتبه آن معادله دیفرانسیل نامند.

درجه : توان بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل را درجه آن معادله دیفرانسیل می نامند.

مثال) مرتبه و درجه معادلات زیر را تعیین کنید؟

مرتبه ۲، درجه ۳ : $(y'')^3+(y')^5+5y=x^2$

مرتبه ۲، درجه ۱ : $y''+2y'^2-y=\tan x$

مرتبه اول و درجه دوم : $(y')^{\wedge}+y^{\wedge}=1$

مرتبه دوم و درجه دوم : $(y'')^2+(y')^3-y=x$

معادلات دیفرانسیل معمولی را می توان به دو دسته خطی و غیرخطی تقسیم کرد : هرگاه معادلات دیفرانسیل برحسب متغیر وابسته و. مشتقات آن یعنی $y',y'',...,y^{(n)}$ و خطی باشد آن را خطی می نامیم.

معادله زیر یک معادله دیفرانسیل مرتبه nام خطی در حالت کلی را نشان می دهد :

$$\alpha_n(x)y^{(n)}+\alpha_{n-1}(x)y^{(n-1)}+...+\alpha(x)y=y(x)$$

در غیر اینصورت معادله غیرخطی است.

اگر $g(n)=0$ باشد معادله همگن واگر غیر صفر باشد معادله ناهمگن است.

مثال) مرتبه و نوع معادلات دیفرانسیل زیر را مشخص کنید؟

غیرخطی و مرتبه اول : $\frac{dy}{dn}+xy^2=0$

خطی و مرتبه دوم : $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dn}+2y=\sin x$

غیرخطی و غیرهمگن $y''+4yy'+2y-Cosx=0$

۱ . ۳) جوابهای معادله دیفرانسیل :

جواب عمومی : جوابی است که دارای یک یا چند ثابت دلخواه بوده و به ازای هر مقدار از این ثابتها در معادله دیفرانسیل صادق باشد. یعنی با قرار دادن مشتق های در معادله هر دو طرف معادله با هم برابر باشند

جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه nام دارای n ثابت دلخواه است.

مثال) جواب معادله دیفرانسیل $y''-4y=0$ عبارت از :

$$y(-6e^{x})-e^{-x}(4e^{2x}y'-2e^{2x}y'')+e^{2x}(-y''e^{-x}-y'e^{-x})=0$$ و

$$y=e^{2x}$$

چون با مشتق گرفتن از هر یک جواب ها و قراردادن در معادله حاصل صفر می شود .

و جواب عمومی معادله به صورت $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$ می باشد دقت کنید معادله مرتبه دوم و جواب دارای دو ثابت است .

جواب خصوصی : هرگاه ثابت های موجود در جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل تحت شرایط مرزی یا شرایط اولیه تعیین شوند جواب حاصل را جواب خصوصی معادله دیفرانسیل گویند.

جواب غیرعادی (پوش منحنی) : جوابی است که منحنی نمایش آن بر کلیه منحنی های مربوط به جواب عمومی مماس باشد. در حقیقت جواب غیر عادی از جواب عمومی بدست نمی آید

جواب غیرعادی باید در معادله دیفرانسیل صادق باشد.

مثال): در معادلـه $y'=2\sqrt{y}$ جـواب عمـومی بـه صـورت $y=(x+c)^2$ و جـواب غیـر عـادی $y(x)=0$ است که از جواب عمومی بدست نمی اید.

- جواب غیرعادی را نمی توان از جواب عمومی بدست آورد.
- معادلات دیفرانسیل خطی فاقد جواب غیرعادی هستند.

۱. ۴) تشکیل معادله دیفرانسیل از یک رابطه اولیه :

برای بدست آوردن معادله دیفرانسیل، ثابتهای موجود در معادله دسته منحنی را حذف مـی کـنیم.

هرگاه معادله دسته منحنی دارای n ثابت باشد.

باید n بار مشتق بگیریم و با استفاده از این مشتقات و معادلـه دسـته منحنـی، ثابتهـا را حـذف کنیم.

- هرگاه بخواهیم با استفاده از معادله دسته جواب $y=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\ldots$

معادله دیفرانسیل مربوطه دست یابیم از بسط دترمینال زیر استفاده می کنیم :

$$\begin{vmatrix} y & f_1(n) & f_2(n)\ldots\ldots & f_n(n) \\ y' & f_1'(n) & f_2'(n)\ldots\ldots & f_n'(n) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ y^{(n)} & f_{1(n)}^{(n)} & f_{2(n)}^{(n)} & f_{n(n)}^{(n)} \end{vmatrix}=0$$

مثال) تابع $y_1=\sin x, y_2=x$ جواب های کدام معادله دیفرانسیل است؟

$$\begin{vmatrix} y & \sin x & x \\ y' & \cos x & 1 \\ y'' & -\sin x & 0 \end{vmatrix}=0$$

از بسط دترمینان فوق داریم :

$$y(0+\sin x)-\sin x(0-y'')+x(-y'\sin x-y''\cos x)=0$$
$$\Rightarrow y''(\sin x-x\cos x)-y'x\sin x+y\sin x=0$$

مثال :) معادله دیفرانسیل خانواده منحنی $y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$ را بدست آورید

ابتدا دترمینان زیر را تشکیل می دهیم

$$\begin{vmatrix} y & e^{-x} & e^{2x} \\ y' & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ y'' & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix}=0$$

از بسط این دترمینان داریم :

$$y(-6e^{x})-e^{-x}(4e^{2x}y'-2e^{2x}y'')+e^{2x}(-y''e^{-x}-y'e^{-x})=0$$

۱ . ۵) تعیین مسیرهای متعامد یک دسته منحنی

دو دسته منحنی را متعامد گویند هرگاه هر عضو از یک دسته بر تمامی اعضای دسته دیگر عمود باشد برای تعیین مسیرهای متعامد یک دسته منحنی ابتدا معادله دیفرانسیل آن دسته منحنی را تعیین می کنیم و در معادله حامله که به صورت $f(x,y,\frac{dy}{dx})=0$ است با قراردادن $-\frac{dx}{dy}$ (یا $\frac{-1}{y'}$) به جای $\frac{dy}{dx}$ (یا y') معادله دیفرانسیل متعامد را مشخص کرده با حل این معادله دیفرانسیل معادله مسیرهای متعامد را بدست می آوریم هرگاه معادله دیفرانسیل در مختصات قطبی داده شده باشد با جایگزینی $\frac{-dr}{rd\theta}$ به جای $r\frac{d\theta}{dr}$ معادله دیفرانسیل مسیرهای متعامد حاصل می شود.

مثال) معادله مسیرهای قائم بر دسته منحنی های $xy^2 = c$ کدام است؟

حل) ابتدا معادله دیفرانسیل مربوط به دسته منحنی های $xy^2 = c$ را بدست می آوریم :

$$y^2 + 2xyy' = 0$$

با جایگزینی $y' \to \frac{-1}{y'}$ داریم :

$$y^2 + 2xy(\frac{-1}{y'}) = 0 \Rightarrow y^2 - 2xy\frac{dx}{dy} = 0 \Rightarrow ydy = 2xdx \Rightarrow_1$$

$$\frac{1}{2}y^2 = x^2 + c \quad \text{یا} \quad y^2 - 2x^2 = c$$

«فصل دوم»

«معادلات دیفرانسیل مرتبه اول»

۱.۲) مقدمه

معادلات دیفرانسیل مرتبه اولی که برای آنها راه حل می توان ارائه نمود بـه چهـار دسـته کلـی بـه صورت زیر طبقه بندی می شوند :

الف) معادلات جداپذیر

ب) معادلات همگن

ت) معادلات کامل

ث) معادلات خطی

حل یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول در حالت کلی مسأله ای مشکل است زیرا یم روش کلی برای همه حالتها وجود ندارد. حتی معادلهٔ به ظاهر سادهٔ $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ را در حالت کلی نمی توان حـل کرد.

۱.۲) روشهای مستقیم :

معادله دیفرانسیل مرتبه اول $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ را درنظر می گیریم اگر مستقل از باشد آنگاه معادله را با انتگرالگیری از طرفین نسبت به می توان حل کرد.

مثال : معادله $\frac{dy}{dx}=x$ را حل کنید؟

حل : با انتگرالگیری از طرفین نسبت به x داریم : $\int\frac{dy}{dx}dx=\int xdx$

$$y=\int dy=\int xdx=\frac{1}{2}x^2+c$$

این روش برای معادلات مرتبه بالاتر به صورت $y^{(n)}=f(x)$ هم قابل اجرا است.

یک روش ساده دیگر وقتی است کـه متغیرهـای از هـم جـدا مـی شـوند در چنـین حـالتی تـابع $f(x,y)$ را می توان به صورت دو تابع نوشت :

$$f(x,y)=\frac{y(x)}{h(y)}$$

که h(y),g(x) توابعی فقط از یـک متغیـر هسـتند. بنـابراین ایـن معادلـه را مـی تـوان بـه صـورت $h(y)\frac{dy}{dx}=g(x)$ نوشت با انتگرالگیری از طرفین نسبت به x داریم.

$$\int h(y)dy = \int h(y)\frac{dy}{dx}.dx = \int y(x)dx + c$$

مثال : معادله $\frac{dy}{dx} = 2xy$ را حل کنید :

حل : این معادله را به صورت $\frac{1}{y}dy = 2xdx$ می نویسیم که پس از انتگرالگیری داریم :

$$Lny = x^2 + c \Rightarrow y = e^{x^2+c} = e^c.e^{x^2} = c_1e^{x^2}$$

که جواب عمومی معادله است و شامل یک ثابت حقیقی دلخواه c_1است بنابراین معادله $y' = 2xy$ دارای جوابهای بسیار است. که با هر مقدار خاصی از c_1 بدست می آید.

۲.۲) معادلات جداپذیر :

تعریف ۱ : معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت :

$$M(x) + N(y)y' = 0$$

یا شکل دیفرانسیلی معادل آن :

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

را جداپذیر می نامیم. دلیل این نامگذاری آن است که در معادلات فوق متغیرهای x , y در جملات جداگانه ظاهر می شوند.

معادله $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ را جداشدنی گویند هرگاه توان آن را به شکل زیر بیان کرد :

$$f_1(x)g_2(y)dx + f_2(x)g_1(y)dy = 0$$

$y' = f(x)g(y)$ یا

که برای تعیین جواب معادله، آن را به شکل زیر می نویسیم :

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_{1(y)}}{g_2(y)}dy = 0$$

با انتگرالگیری از معادله فوق جواب معادله دیفرانسیل به دست می آید.

مثال :

در تمرینات ۱ تا ۱۴ برای معادلاتی که جداپذیر هستند، جواب عمومی را به‌دست آورید.

۱- $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$

۲- $y' = y^{\frac{1}{2}}$

۳- $y' + xy = 3$

۴- $y' = x - xy - y + 1$

۵- $(1+x)y\,dx + x\,dy = 0$

۶- $yy' = y^2x^3 + y^2x$

۷- $xy' - \frac{y}{\ln x} = xy^2$

۸- $3xy\,dx = (x^2+4)dy = 0$

۹- $(1+\ln x)dx + (1+\ln y)dy = 0$

$$y^{4}dx+(x^{2}-3y)dy=0$$ -۱۰

$$a^{2}dx=x\sqrt{x^{2}-a^{2}}\,dy$$ -۱۱

$$(1+y^{2})\cos x\,dx=2(1+\sin^{2}x)y\,dy$$ -۱۲

$$ye^{x+y}dy=dx$$ -۱۳

$$y'=e^{y-x}\sin x$$ -۱۴

حل:

(۱

$$y'=\frac{1+y^{2}}{1+x^{2}}\quad\Rightarrow\quad\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^{2}}{1+x^{2}}$$

معادله جداپذیر است بنابراین:

$$\frac{dy}{1+y^{2}}=\frac{dx}{1+x^{2}}\quad\Rightarrow\quad\int\frac{dy}{1+y^{2}}=\int\frac{dx}{1+x^{2}}+k$$

$$\Rightarrow\quad\tan^{-1}y=\tan^{-1}x+k\quad\Rightarrow\quad y=\tan\left(\tan^{-1}x+k\right)\quad\Rightarrow\quad y=\frac{x+\tan k}{1-x\tan k}$$

$$\tan k=c\quad\Rightarrow\quad y=\frac{x+c}{1-cx}$$

(۲

$$y'=y^{\frac{1}{2}}\quad\Rightarrow\quad\frac{dy}{dx}=y^{\frac{1}{2}}\quad\Rightarrow\quad\frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}}=dx\qquad\frac{\partial(x+2y)}{\partial x}=1=\frac{\partial(4x+y)}{\partial y}$$

$$\int\frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}}=\int dx+c\quad\Rightarrow\quad 2y^{\frac{1}{2}}=x+c\quad\Rightarrow\quad 4y=(x+c)^{2}\quad\Rightarrow\quad y=\frac{1}{4}(x+c)^{2}$$

۳)
$$y'+xy=۳ \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}+xy=۳$$

مشخص است که معادله فوق جداپذیر نیست.

۴)
$$y'=x-xy-y+۱ \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=x(۱-y)-(۱-y) \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=(۱-y)(x-۱)$$

معادله فوق جداپذیر است.

$$\frac{dy}{۱-y}=(x-۱)dx \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dy}{۱-y}=\int(x-۱)dx+c_۱$$

$$\Rightarrow\quad -\ln|۱-y|=\frac{x^۲}{۲}+x+c_۱$$

۷)
$$xy'-\frac{y}{\ln x}=xy^۲ \quad\Rightarrow\quad x\frac{dy}{dx}-\frac{y}{\ln x}=xy^۲$$

مشخص است که معادله جداپذیر نیست.

۸)
$$۳xydx+(x^۲+۴)dy=۰ \quad\Rightarrow\quad \frac{۳x}{x^۲+۴}dx+\frac{dy}{y}=۰$$

$$۳\int\frac{x}{x^۲+۴}dx+\int\frac{dy}{y}=c_۱ \quad\Rightarrow\quad \frac{۳}{۲}\ln(x^۲+۴)+\ln|y|=c_۱$$

$$(x^۲+۴)^{\frac{۳}{۲}}|y|=c \quad\Rightarrow\quad |y|=c(x^۲+۴)^{-\frac{۳}{۲}}$$

۱۲)
$$(۱+y^۲)\cos x dx=۲(۱+\sin^۲ x)ydy \quad\Rightarrow\quad \frac{\cos x\, dx}{۱+\sin^۲ x}=\frac{۲y\, dy}{۱+y^۲}$$

$$\int\frac{\cos xdx}{۱+\sin^۲ x}=\int\frac{۲ydy}{۱+y^۲}$$

$$\Rightarrow\quad \tan^{-۱}(\sin x)=\ln(۱+y^۲)+c_۱ \quad \text{یا} \quad \ln(۱+y^۲)=\tan^{-۱}(\sin x)+۲$$

$$ye^{x+y}dy=dx \quad\Rightarrow\quad ye^{y}dy=e^{-x}dx \quad\Rightarrow\quad \int ye^{y}dy=\int e^{-x}dx$$

$$(y-۱)e^{y}=-e^{-x}+c \quad\Rightarrow\quad (y-۱)e^{y}=c-e^{-x}$$

۱۴)
$$y'=e^{y-x}\sin x \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{e^{y}}{e^{x}}\sin x \quad\Rightarrow\quad e^{-y}dy=e^{-x}\sin x\, dx$$

$$\int e^{-y}dy=\int e^{-x}\sin xdx \quad\Rightarrow\quad -e^{-y}=-\frac{۱}{۲}(\sin x+\cos x)e^{-x}+c_۱$$

$$\Rightarrow\quad e^{-y}=\frac{۱}{۲}(\sin x+\cos x)e^{-x}+c$$