جلسه اول امار حسابداری کاردانی و کارشناسی یاداوری مطالب گفته شده در کلاس

آنالیز ترکیبی و احتمال

○آنالیز ترکیبی

این بحث شامل **فاکتوریل، اصل ضرب (شمارش)، ترتیب** (جایگشت)، **تبدیل** و **ترکیب** است.

• فاکتوریل

فاکتوریل عدد n برابر است با حاصلضرب اعداد طبیعی از یک تا n و آن را به صورت زیر نشان می‌دهند:

$$\boxed{n! = n(n-1)(n-2)\cdots \times 2 \times 1}$$

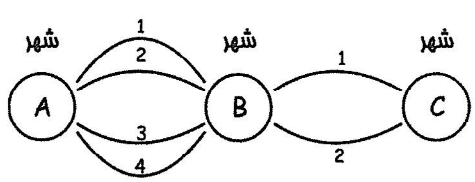
نکته : فاکتوریل عدد صفر، برابر یک است یعنی:

$$\boxed{0! = 1}$$

• اصل ضرب (اصل اساسی شمارش)

هرگاه عملی را بتوان به n طریق مختلف و عمل دیگری را به m طریق مختلف انجام داد. انجام هر دو فعل با هم را می‌توان به $n \times m$ طریق مختلف انجام داد.

شخصی می‌خواهد از شهر A به شهر C مسافرت کند و بایستی حتماً از شهر B عبور کند. یعنی عمل مسافرت این شخص در دو مرحله انجام می‌گیرد. اگر مسافرت از شهر A به شهر B به 4 طریق و از شهر B به شهر C به 2 طریق ممکن باشد، مسافرت از شهر A به شهر C به چند طریق ممکن است؟



حل : این عمل بنا به اصل ضرب به $8 = 2 \times 4$ طریق ممکن می‌باشد.

<table>
<tr><th>ردیف</th><th>سؤال و حل</th></tr>
<tr><td>(a</td><td>چند عدد چهار رقمی داریم؟

حل : هر یک از اعداد 0 تا 9 (10 عدد) می‌توانند در ارزش‌های یکان، دهگان و صدگان قرار گیرند، فقط عدد صفر نمی‌تواند در ارزش هزارگان باشد بنابراین:

هزارگان   صدگان   دهگان   یکان
$9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$</td></tr>
<tr><td>(b</td><td>چند عدد چهاررقمی با ارقام زوج داریم؟

حل : انتخاب‌ها فقط از میان ارقام زوج 8 و 6 و 4 و2 و0 می‌باشد فقط رقم صفر در مکان هزارگان قرارنمی‌گیرد بنابراین:

هزارگان   صدگان   دهگان   یکان
$4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$</td></tr>
<tr><td>(c</td><td>چند عدد چهاررقمی با ارقام یکان و هزارگان یکسان داریم؟

حل : توجه کنید که ابتدا باید ارقام مکان‌های یکان و هزارگان مشخص شود و چون مکان هزارگان دارای محدودیت است (رقم صفر نمی‌تواند در هزارگان قرار گیرد) ابتدا تکلیف مکان هزارگان را مشخص می‌کنیم و هر عددی که در مکان هزارگان قرار گیرد در مکان یکان نیز قرار می‌گیرد بنابراین فقط 1 انتخاب برای ارزش یکان داریم:

هزارگان   صدگان   دهگان   یکان
$9 \times 10 \times 10 \times 1 = 900$</td></tr>
<tr><td>(d</td><td>چند عدد چهاررقمی داریم که فقط ارقام یکان و هزارگان یکسان دارند؟

حل : توجه کنید که انتخاب ارقام یکان و هزارگان مانند حالت قبل است، اما با توجه به کلمهٔ **فقط،** ارقام دهگان و صدگان نیز نه با آن‌ها یکسانند و نه با خودشان. بنابراین:

هزارگان   صدگان   دهگان   یکان
$9 \times 9 \times 8 \times 1 = 648$</td></tr>
<tr><td>(e</td><td>چند عدد چهاررقمی بدون تکرار ارقام داریم؟

هزارگان   صدگان   دهگان   یکان
$9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$</td></tr>
</table>

f)

چند عدد چهاررقمی زوج بدون تکرار ارقام داریم؟

حل : حل این مسأله به صورت انجام یک عمل ضرب امکان‌پذیر نیست لذا بایستی این مسأله را به دو نوع مجزا تقسیم نموده و هر نوع را با اصل ضرب حل کرد، سپس دو مقدار بدست آمده را جمع کنیم، بنابراین:

هزارگان   صدگان   دهگان   یکان

تعداد اعدادی که با رقم **صفر** زوج می‌شوند. $\rightarrow$ $9 \times 8 \times 7 \times 1 = 504$

تعداد اعدادی که با رقم **غیرصفر** زوج می‌شوند. $\rightarrow$ $8 \times 8 \times 7 \times 4 = 1792$

دقت شود در اعدادی که با رقم غیرصفر زوج می‌شوند،4 انتخاب برای یکان داریم و 8 انتخاب برای هزارگان. چون عدد صفر و رقمی که در یکان به کار برده می‌شود حق انتخاب برای هزارگان را ندارند، بعد از آن که دو رقم استفاده شده است به ترتیب 8 و 7 انتخاب برای صدگان و دهگان داریم. بنابراین:

$504 + 1792 = 2296$

g)

چند عدد چهاررقمی داریم که فقط سه رقم یکان و دهگان و صدگان یکسان دارند؟

حل : 9 انتخاب برای هزارگان داریم (همه اعداد به غیر از صفر)، بنابراین 1 رقم از دست می‌رود، 9 انتخاب نیز برای صدگان داریم، پس از مشخص شدن رقم صدگان، ارقام دهگان و یکان نیز خودبه‌خود مشخص شده‌اند بنابراین حق انتخاب 1 رقم برای این مکان‌ها داریم. بنابراین:

هزارگان   صدگان   دهگان   یکان

$9 \times 9 \times 1 \times 1 = 81$

• ترتیب (جایگشت)

منظور از جایگشت n شیء متمایز این است که آن اشیاء را به چند طریق مختلف می‌توان کنار هم قرار داد.

حالت‌های مختلفی که در جایگشت می‌توان بحث کرد به صورت زیر می‌باشد:

۱ـ جایگشت در یک ردیف

تعداد ترتیب یا جایگشت n شیء متمایز در یک صف کنار یکدیگر برابر است با:

$$\boxed{n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!}$$

6 نفر و 6 صندلی در یک ردیف داریم. اگر یک نفر از بین این 6 نفر (نفر مشخصی) روی یکی از صندلی‌ها بنشیند، بقیه به چند حالت می‌توانند برروی صندلی‌های باقی‌مانده بنشینند؟

حل : $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6!$

۲ـ جایگشت مدور (دایره‌ای)

تعداد جایگشت‌های n شی متمایز را روی محیط یک منحنی بسته، ترتیب دایره‌ای می‌گویند که برابر است با:

$$\boxed{(n-1)!}$$

مثال ۱: 4 نفر به چند طریق می‌توانند بر دور یک میز بنشینند؟

حل : چون در مثال به کلمهٔ « دور میز» اشاره شده است داریم:

$$(4-1)!=3!=6$$

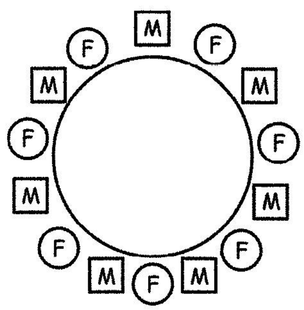
نکته : در جاسوئیچی‌ها و تسبیح‌های n تایی، چون می‌توان آن‌ها را برگرداند، تعداد جایگشت‌ها برابر است با:

$$\boxed{\frac{(n-1)!}{2}}$$

نکته : اگر n شیء و m شیء را بخواهیم یک در میان روی یک منحنی بسته (دایره) بچینیم از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\boxed{m!(n-1)!}$$

مثال ۲: تعداد حالات نشستن 5 مرد و 5 زن، دور یک میز به طور یک در میان را بدست آورید؟



$$(5!)(4!)$$

توجه کنید در صورتی که تعداد مردها 5 و تعداد زن‌ها 4 باشد نمی‌توان آن‌ها را یکی در میان دور میز قرار داد اما می‌توان در یک ردیف یک در میان به صورت !4 !5 قرار داد. MFMFMFMFM

واگر تعداد مردها 5 و تعداد زن‌ها 3 باشد به هیچ شکل نمی‌توان آن‌ها را یکی در میان قرار داد، نه دور یک میز و نه در یک ردیف.

نکته : اگر بخواهیم مردها و زن‌ها متناوباً کنار هم قرار بگیرند، حداکثر اختلاف بین تعداد زن‌ها و مردها در شرایطی که می‌خواهیم یکی در میان در یک ردیف بنشینند 1 باید باشد.

۳ـ جایگشت با تکرار (افرازهای مرتب)

تعداد ترتیب یا جایگشت n شیء که n_1 تای آن از نوع اول و n_2 تای آن از نوع دوم و ... n_k تای آن از نوع k ام باشد برابر است با:

$$\boxed{\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} \quad , \quad n_1+n_2+\cdots+n_k=n}$$

مثال ۱: با حروف کلمهٔ «حسابداری» چند کلمهٔ 8 حرفی می‌توان نوشت؟

حل : این کلمه شامل 8 حرف می‌باشد که حرف «ا»، دوبار تکرار شده است. بنابراین:

$$\frac{8!}{2!} = 20160$$

مثال ۲: با حروف کلمهٔ «حسابداری» چند کلمه 4 حرفی می‌توان نوشت؟

حل : چون تعداد حروف متمایز کلمهٔ حسابداری، 7 حرف می‌باشد اما در مسئله، یک کلمهٔ 4 حرفی مطرح شده است، بنابراین ابتدا باید 4 حرف از بین 7حرف انتخاب کرد و در تعداد جایگشت‌های این 4 حرف ضرب کرد، جواب حاصل تعداد کلماتی است که در آن‌ها یک بار حرف «ا» آمده است. سپس باید کلماتی را در نظر بگیریم که حرف«ا» دوبار در آن‌ها تکرار شده است، بنابراین به غیر از حرف «ا»، 2 حرف دیگر باقی می‌ماند که باید از بین 6 حرف انتخاب کرد و در تعداد جایگشت‌های آن ضرب کرد. جواب حاصل تعداد کلماتی است که در آن‌ها دوبار حرف «ا» آمده است و در نهایت باید دو جواب بدست آمده را با یکدیگر جمع کرد.

$$\underbrace{\binom{7}{4} \times 4!}_{\text{تعداد کلمات 4 حرفی دارای یک حرف «ا»}} + \underbrace{\binom{6}{2} \times \frac{4!}{2!}}_{\text{تعداد کلمات 4 حرفی دارای دو حرف «ا»}}$$

۴ـ تعداد تقسیمات n شیء در k سلول به طوری که n_1 تای آن‌ها در سلول اول و n_2 تای آن‌ها در سلول دوم و ... n_k تای آن‌ها در سلول k ام قرار گیرد. برابر است با:

$$\boxed{\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_k!}}$$

مثال ۱: به چند طریق می‌توان 9 نفر کارمند را در یک اتاق 4 نفره، یک اتاق 3 نفره و یک اتاق 2 نفره چیدمان کرد؟(مدیریت ۸۲)

۱) 1400 ۲) 1260 ۳) 72 ۴) 24

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\frac{9!}{4!3!2!} = 1260$$

مثال ۲: به چند طریق می‌توان 9 اسباب‌بازی را بین 4 بچه تقسیم کرد به شرط آن که به کوچک‌ترین بچه 3 اسباب‌بازی و به هر کدام از بچه‌های دیگر 2 اسباب‌بازی برسد؟ (حسابداری ۸۰)

۱) 27 ۲) 108 ۳) 5674 ۴) 7560

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\frac{9!}{3!2!2!2!} = 7560$$

۵ ـ تبدیل

اگر در انتخاب r شیء از n شیء، ترتیب اهمیت داشته باشد، تعداد صورت‌های مختلف این ترتیب‌ها را با نماد P_n^r نشان می‌دهند که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad ; n \geq r}$$

توجه کنید که دو ترتیب وقتی متمایز خواهند بود که یا مجموعهٔ اشیاء به کار رفته در آن‌ها متفاوت باشد و یا در صورت یکسان بودن ترتیب آن‌ها متفاوت باشد.

نکته : اگر کمی دقت کنید، در حالت خاص، اگر $n = r$ ، آن‌گاه داریم:

$$\boxed{P_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!}$$

که همان حالت اول یعنی جایگشت می‌باشد.

اگر 9 نفر در یک مسابقه شرکت کنند به چند طریق ممکن است جوایز اول و دوم و سوم را دریافت کنند؟(مدیریت ۷۹)

۱) 84 ۲) 504 ۳) 635 ۴) 3024

حل : چون ترتیب جوایز مهم است، بنابراین:

$$P_9^3 = \frac{9!}{6!} = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

۶ـ ترتیب‌های ناسازگار

اگر سه حرف a و b و c مفروض باشند، به هر ترتیب قرارگرفتن سه حرف مذکور به طوری که هیچ‌یک از آن‌ها در جایگاه فعلیشان قرار نگیرند، ترتیب ناسازگار گفته می‌شود.

a . تعداد ترتیب‌های ناسازگار n شیء متمایز برابر است با:

$$\boxed{n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}$$

b . تعداد ترتیب‌های ناسازگار r شیء از n شیء متمایز برابر است با:

$$\boxed{P_n^r \sum_{k=0}^{r} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{k=0}^{r} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \times r! \sum_{k=0}^{r} \frac{(-1)^k}{k!} = C_n^r \times r! \sum_{k=0}^{r} \frac{(-1)^k}{k!}}$$

توجه کنید که r ناسازگاری برای $n - r$ سازگاری است.

مثال ۱: 3 نفر که پالتوهای خود را درمحلی آویزان کرده‌اند، به تصادف، یک پالتو برمی‌دارند. مطلوبست تعداد حالاتی که هیچ‌یک از آن‌ها پالتوی خود را بر نداشته باشند؟

حل :

$$n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = 3! \sum_{k=0}^{3} \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = 6 \times \frac{2}{6} = 2$$

مثال۲: برای 10 نفر، 10 نامه می‌فرستیم. مطلوب است تعداد حالاتی که فقط 7 نفر نامه خودشان را دریافت نمایند.

حل : فقط 7 نفر نامه خودشان را دریافت کنند یعنی 3 نفر نامه خودشان را دریافت نکنند بنابراین:

$$\frac{n!}{(n-r)!}\sum_{k=0}^{r}\frac{(-1)^k}{k!}=\frac{10!}{(10-3)!}\sum_{k=0}^{3}\frac{(-1)^k}{k!}=720\left(1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)=240$$

• ترکیب

ترکیب عبارت است از انتخاب r شیء از n شیء، در صورتی‌که ترتیب اشیاء مطرح نباشد که به دو صورت **بدون جایگذاری** و **باجایگذاری** می‌باشد.

انتخاب r شیء از n شیء بدون جایگذاری: $C_n^r=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$
انتخاب r شیء از n شیء با جایگذاری : n^r

مثال۱: تعداد نمونه‌های سه‌تایی با جایگذاری و بدون جایگذاری از جامعه‌ای که دارای 5 عنصر است به ترتیب کدام است؟

۱) 125 و 5 ۲) 125 و 10 ۳) 243 و 10 ۴) 243 و 20

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

بدون جایگذاری: $C_n^r=C_5^3=\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!2!}=10$

با جایگذاری: $n^r=5^3=125$

مثال۲: انتخاب 3 دانشجو از بین 10 دانشجو به طوری که:

a) به عنوان شاگردان ممتاز (ترتیب اهمیت ندارد)

b) به عنوان شاگرد اول، دوم، سوم (ترتیب اهمیت دارد)

حل :

الف) $C_{10}^3=\binom{10}{3}=\frac{10!}{3!7!}=120$

ب) $P_{10}^3=\frac{10!}{(10-3)!}=720$

• نکات مهم ترکیب

۱ـ	$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$ ؛	$C_n^0=C_n^n=1$
۲ـ	$\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$ ؛	$C_n^1=C_n^{n-1}=n$
۳ـ	$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ ؛	$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$
٤ـ	$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ ؛	$C_n^r=C_n^{n-r}$
٥ـ	$\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}$ ؛	$C_{n+1}^r=C_n^{r-1}+C_n^r$

عبارت $C_{n+1}^{r} + 2C_{n+1}^{r-1} + C_{n+1}^{r-2}$ را ساده کنید.

حل : $C_{n+1}^{r} + 2C_{n+1}^{r-1} + C_{n+1}^{r-2} = \underbrace{C_{n+1}^{r} + C_{n+1}^{r-1}}_{\text{نکته ۵}} + \underbrace{C_{n+1}^{r-1} + C_{n+1}^{r-2}}_{\text{نکته ۵}} = C_{n+2}^{r} + C_{n+2}^{r-1} = C_{n+3}^{r}$

۶) تعداد تقسیمات n شیء مشابه در k سلول (نفر) برابر است با:

$$\boxed{\binom{n+k-1}{n} \quad \text{یا} \quad \binom{n+k-1}{k-1}}$$

تعداد تقسیمات n شیء مشابه در k سلول بطوریکه در هر سلول حداقل r شیء قرار گیرد.

$$\boxed{\binom{n-k(r-1)-1}{k-1}}$$

تعداد تقسیمات n شیء مشابه در k سلول بطوریکه در هر سلول حداقل 1شیء قرار گیرد.

$$\boxed{\binom{n-1}{k-1}}$$

مثال ۱: به چند طریق می‌توان 35 سیب مشابه را بین 4 نفر تقسیم کرد؟

حل :

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{35+4-1}{4-1} = \binom{38}{3} = \frac{38!}{3!\,35!} = 8436$$

مثال ۲: به چند طریق می‌توان 8 خودکار سبز و 11 خودکار آبی و 5 خودکار قرمز را بین 3 نفر تقسیم کرد؟

حل :

$$\binom{8+3-1}{3-1}\binom{11+3-1}{3-1}\binom{5+3-1}{3-1} = \binom{10}{2}\binom{13}{2}\binom{7}{2} = 73710$$

توجه کنید، اگر بخواهیم هر نفر حداقل یک رنگ از هر خودکار داشته باشد، داریم:

$$\binom{n-1}{k-1} \Rightarrow \binom{8-1}{3-1}\binom{11-1}{3-1}\binom{5-1}{3-1} = \binom{7}{2}\binom{10}{2}\binom{4}{2} = 21 \times 45 \times 6 = 5670$$

۷ـ با n شیء می‌خواهیم ترکیب‌هایی حداکثر r تایی و حداقل 1 تایی که در آن‌ها تکرار مجاز است بسازیم، تعداد حالات ممکن عبارت است از:

$$\boxed{n + n^2 + n^3 + \dots + n^r = \frac{n^r - 1}{n-1} \times n}$$

با عددهای 4 و 3 و 2 و 1 و 6 چندعدد حداکثر 10 رقمی می‌توانیم بسازیم ؟

حل :

$$\begin{matrix} r = 10 \\ n = 5 \end{matrix} \Rightarrow 5^1 + 5^2 + \dots + 5^{10} = \frac{5^{10}-1}{5-1} \times 5$$

یکی از کاربردهای ترکیب، استفاده آن در بسط چند جمله‌ای‌ها می‌باشد.

نکته : به طور کلی در مسائلی که تعویض در ترتیب اشیاء، در نتیجهٔ حاصل تغییری ایجاد نکند از ترکیب استفاده می‌کنیم در غیر این صورت از ترتیب، به عنوان مثال در مسائلی مانند: انتخاب چندنماینده از بین چندنفر، انتخاب چند شیء از میان اشیاء مختلف، مخلوط نمودن رنگ‌های مختلف به منظور ایجاد رنگ‌های جدید و .... از ترکیب استفاده می‌کنیم.

احتمال (Probability)

برای بیان مفهوم احتمال، ابتدا باید عناوین زیر مطرح شود:

• آزمایش

در نظریهٔ احتمال فعالیتی که نتیجه آن از قبل مشخص نباشد به آزمایش معروف است.

• فضای نمونه

مجموعه پیامدهای ممکن یک آزمایش را فضای نمونه آن آزمایش گویند. به عنوان مثال:

فضای نمونهٔ پرتاب دوسکه، اگر ظاهر شدن شیر را با H وخط را با T نشان دهیم، عبارت است از:

$S = \{HH , HT , TH , TT\}$

• فضای نمونه محدود و نامحدود

هنگامی که تعداد اعضای فضای نمونه‌ای **نامتناهی** باشد، آن فضای نمونهٔ نامحدود است مانند: شرکتی را در نظر بگیرید که لامپ تولید می‌کند. مأمور کنترل کیفیت این شرکت می‌خواهد آن‌قدر لامپ آزمایش کند تا به اولین لامپ معیوب برسد. فضای نمونه عبارت است از:

$S = \{1 , 2 , 3 , \cdots\}$

اگر فضای نمونه تعداد محدودی عضو داشته باشد، فضای نمونه موردنظر محدود است مانند فضای نمونهٔ پرتاب یک سکه:

$S = \{H , T\}$

• فضای نمونهٔ گسسته و پیوسته

ـ فضای نمونهٔ گسسته

فضای نمونه‌ای که شامل **تعداد متناهی یا تعداد نامتناهی** ولی **شمارش پذیر** است را گویند. مانند: فضای نمونهٔ پرتاب یک سکه، یک تاس که تعداد عناصر فضای نمونهٔ آن‌هامتناهی است و فضای نمونهٔ تعداد لامپ‌های انتخاب شده تا اولین لامپ معیوب که نامتناهی ولی شمارش‌پذیر است.

ـ فضای نمونهٔ پیوسته

فضای نمونه‌ای برخی از آزمایش‌ها که گسسته نباشد و در طول یک پاره خط تعریف شود اصطلاحاً آن را فضای نمونهٔ پیوسته گویند. مانند: مدت زمانی که کارگری برای کار روی قطعه‌ای صرف می‌کند.

• پیشامد

یکی از زیرمجموعه‌های فضای نمونه است. مثلاً در پرتاب یک سکه، خط آمدن یک پیشامد است و شیرآمدن پیشامد دیگری است.

توجه کنید که اگر در آزمایش نوعی تقارن وجود داشته باشد که مطمئن باشیم وقوع یک پیامدهمان قدر امکان دارد که وقوع هر پیامد مقدماتی دیگر، می‌گوئیم فضای نمونه دارای پیشامدهای اولیه یا **پیامدهای مقدماتی هم شانس(هم‌تراز)** است. مثلاً در پرتاب یک سکه سالم، دو پیامد مقدماتی مختلف (شیر و خط) وجود دارد که امکان وقوع هر یک با دیگری برابر است؛ یعنی امکان وقوع هر کدام $\frac{1}{2}$ است.

○ احتمال

اندازه امکان وقوع حادثه A را با $P(A)$ نشان داده که احتمال حادثه بوده یا به عبارت دیگر شانس وقوع پیشامد خاصی را گویندکه $0 \le P(A) \le 1$.

❍ انواع بیان احتمال

۱ـ احتمال کلاسیک

احتمال وقوع پیشامد خاصی مانند A عبارت است از تعداد عضوهای پیشامد A (تعداد حالات مساعد) به تعداد عضوهای فضای نمونه (تعداد حالات ممکن).

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالات مساعد}}{\text{تعداد حالات ممکن}}$$

توجه کنید که همهٔ پیامدهای مقدماتی، شانس مساوی برابر انتخاب شدن دارند.

۲ـ احتمال هندسی

این احتمال به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(A) = \frac{\text{طول، سطح یا حجم مساعد}}{\text{طول، سطح یا حجم کل}}$$

۳ـ احتمال آماری

در آزمایشاتی که پیامدهای مقدماتی **هم شانس نمی‌باشند**، تعریف احتمال به صورت زیر می‌باشد:

$$\text{A فراوانی نسبی پیشامد} = \frac{\text{تعداد دفعاتی که A در N تکرار آزمایش روی می‌دهد}}{N}$$

در صورتی می‌توان از فراوانی نسبی به عنوان مبنای احتمال استفاده کرد که **تعداد تکرارهای آزمایش (N)** به سمت **بی‌نهایت** میل کند بنابراین:

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} (\text{فراوانی نسبی پیشامد A در N تکرار}) = \lim f_i$$

مثال ۱: یک قفل رمزدار از سه رقم 0 تا 9 تشکیل یافته است (ارقام نمی‌توانند تکرار شوند). رمزی را به تصادف امتحان کنیم، احتمال آن‌که قفل باز شود چقدر است؟

حل :

$$P(A) = \frac{\text{تعداد مساعد}}{\text{تعداد کل حالات}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$n(S) = \text{تعداد کل حالات} = 10 \times 9 \times 8 = 720$

$n(A) = \text{تعداد مساعد} = 1 \quad \rightarrow$ فقط یکی از رمزها قفل را باز می‌کند.

$P(A) = \frac{1}{720}$ ؛ احتمال کلاسیک

مثال ۲: در صورتی‌که یک نقطه داخل یک مربع به ضلع 2 انتخاب شود، احتمال آن‌که داخل دایره‌ای به شعاع 1 محاط باشد، چیست؟

حل :

$p(A) = \frac{\text{مساحت دایره}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{\pi r^2}{L^2} = \frac{\pi \times (1)^2}{2^2} = \frac{\pi}{4}$ ؛ احتمال هندسی

حوادث از نقطه نظر احتمال وقوع عبارتند از:

۱) غیرممکن :	$P(A)=0$	
۲) تصادفی :	$0<P(A)<1$	$\Leftarrow \quad 0\le P(A)\le 1$
۳) یقینی (حتمی) :	$P(A)=1$	

حوادث با هم به صورت‌های زیر درنظر گرفته می‌شوند:

۱) حوادث هم‌تراز
۲) حوادث مستقل
۳) حوادث ناسازگار

○ حوادث هم‌تراز (هم‌شانس)

به حوادثی که احتمال وقوع یکسان وبرابر با هم را داشته باشند حوادث هم‌تراز (هم‌شانس) می‌گوئیم.

نتایج پرتاب یک تاس:
$$\begin{cases} P(A_i)=\frac{1}{6} \\ i=1,2,\cdots,6 \end{cases}$$

نتایج پرتاب یک سکه:
$$\begin{cases} P(A_i)=\frac{1}{2} \\ i=\text{خط و شیر} \end{cases}$$

نکته : حوادث به طور پیش‌فرض هم‌تراز فرض می‌شوند و n حادثه هم‌تراز به طور پیش‌فرض هر کدام احتمال $\frac{1}{n}$ دارند.

○حوادث مستقل:

هرگاه وقوع یا عدم وقوع یک حادثه تأثیری در وقوع یا عدم وقوع حادثه دیگر نداشته باشد دو حادثه را مستقل گویند وخواهیم داشت:

$$\boxed{A\,,B\ \text{مستقل} \quad \Leftrightarrow \quad P(A\cap B)=P(A)\times P(B)}$$

توجه کنید که درمقابل حوادث مستقل، حوادث وابسته مطرح می‌شوند.

سه پیشامد A و B و C مفروض هستند:

$$\boxed{(1).\begin{cases} P(A\cap B)=P(A).P(B) \\ P(A\cap C)=P(A).P(C) \\ P(B\cap C)=P(B).P(C) \end{cases} \quad , \quad (2).P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B).P(C)}$$

هرگاه رابطهٔ (1) و (2) همزمان برقرار باشند، سه پیشامد A و B و C مستقل می‌باشند.

هرگاه فقط رابطهٔ (1) برقرار باشد سه پیشامد A و B و C دوبه دو مستقل می‌باشند.

مثال ۱: شرط استقلال سه واقعه A و B و C تعریف شده در یک فضای نمونه از یکدیگر چیست؟

۱) $P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B).P(C)$

۲) $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

$P(A\cap C)=P(A).P(C)$

$P(B\cap C)=P(B).P(C)$

۳) $P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B).P(C)$

$P(A\cap B)=P(A).P(B)$

$P(A\cap C)=P(A).P(C)$

$P(B\cap C)=P(B).P(C)$

۴) یکی از دوشرط ۱ یا ۲ جاری باشد.

حل : بنابرنکته گفته شده، گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مثال ۲: اگر $P(A)=0.3$ و $P(B)=0.2$ و $P(A\cap B)=0.06$، رویدادهای (حوادث) A و B چگونه‌اند؟

۱) مکمل ۲) مستقل ۳) ناسازگار ۴) وابسته

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$P(A\cap B)=P(A).P(B) \Rightarrow 0.06=0.3\times 0.2 \rightarrow$ A و B مستقل‌اند

توجه کنید در احتمال « **و** » را با $\cap$ و «**یا**» را با $\cup$ نمایش می‌دهند.

مثال ۳: در پرتاب یک تاس و یک سکه احتمال ظاهر شدن 2 و شیر چه خواهد بود؟

حل :

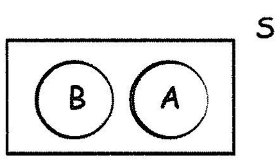
پیشامد 2 آمدن تاس $= A$

پیشامد شیرآمدن سکه $= B$

$\xrightarrow{\text{A و B مستقل}}$ $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

○ حوادث ناسازگار

هرگاه وقوع همزمان دو حادثه **غیرممکن** باشد، حوادث را ناسازگار گوئیم و در نتیجه:



$$\boxed{A\,,\,B \text{ ناسازگار} \Leftrightarrow \begin{cases} A\cap B=\phi \\ P(A\cap B)=0 \end{cases}}$$

نکته : در دو حادثه مستقل A و B هرگاه احتمال وقوع یکی از حوادث **صفر** شود آن‌گاه دو حادثه ناسازگارند.

$$\boxed{A\,,\,B \text{ مستقل} \Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)\xrightarrow[\text{یا } P(B)=0]{P(A)=0} P(A\cap B)=0 \Leftrightarrow A\,,\,B \text{ ناسازگار}}$$

مثال ۱: $P(A) = 0.1$ و $P(B) = 0.2$ و $P(A \cap B) = 0$ و A و B نسبت به هم چگونه‌اند؟

۱) مستقل　　۲) ناسازگارند　　۳) وابسته‌اند　　۴) هیچ‌کدام

حل : چون $P(A \cap B) = 0$ $\Leftarrow$ A , B ناسازگارند.

بنابراین گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

مثال ۲: در پرتاب یک سکه و یک تاس (دو حادثه مستقل) احتمال ظاهرشدن 7 و شیر کدام است؟

حل :

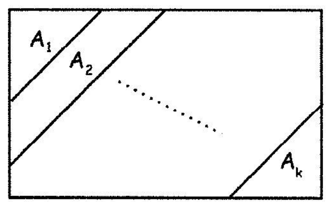
A پیشامد = ظاهر شدن شیر $\longrightarrow P(A) = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times 0 = 0$$

B پیشامد = ظاهر شدن 7 $\longrightarrow P(B) = 0$

○ گروه کامل حوادث (افراز فضای نمونه‌ای)

پیشامدهای A_1 و ... و A_n را یک افراز فضای نمونه‌ای می‌گوییم، هرگاه:



$$\left|\begin{array}{l} A_i \cap A_j = \phi \qquad i \neq j \\ S = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \qquad \Rightarrow \quad P(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n) = 1 \end{array}\right.$$

• نکات مهم احتمال:

۱ـ $\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$

۲ـ جمع کل احتمالات همواره برابر **یک** می‌باشد؛ $\boxed{P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1}$

۳ـ اگر احتمال وقوع حادثه B ، k برابر احتمال وقوع حادثه A باشد و این دو حادثه کل را بپوشانند $(P(A) + P(B) = 1)$ ، داریم:

$$P(A) = \frac{1}{k+1} \qquad P(B) = \frac{k}{k+1}$$

اگر $P(e_1) = 2p(e_2)$ و $p(e_3) = p(e_4) = \frac{1}{4}$ باشد $p(e_1)$ و $p(e_2)$ را پیدا کنید؟

حل :

$$P(e_1) + P(e_2) + P(e_3) + P(e_4) = 1$$

$$2P(e_2) + P(e_2) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad 3P(e_2) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad P(e_2) = \frac{1}{6}, P(e_1) = \frac{1}{3}$$

۴ـ اگر A و B دو حادثه باشند؛

احتمال اجتماع دو حادثه A و B به صورت $P(A\cup B)$ می‌تواند یکی از مفاهیم زیر را داشته باشد.

ـ وقوع حداقل یکی از دو حادثه A و B

ـ وقوع A یا B

ـ حادثه متأثر از A و B اتفاق بیافتد.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

B و A مستقل: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A).P(B)$

B و A ناسازگار: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

احتمال شرطی:
$$\begin{cases} P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(B\mid A).P(A) \\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\mid B).P(B) \end{cases}$$

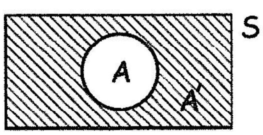
اگر A و B و C ، سه حادثه باشند:

$$\boxed{P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)}$$

و به طور کلی: اگر A_1 ، A_2 ، ... ، A_n حادثه دلخواه باشند:

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P\left(A_i\cap A_j\right)+\sum_{i<j<k}P\left(A_i\cap A_j\cap A_k\right)-\cdots(-1)^{n+1}P\left(A_1\cap A_2\ldots\cap A_n\right)}$$

۵ـ اگر A پیشامد وقوع یک حادثه باشد، آن‌گاه **مکمل** A که با $\left(\bar{A}\ ,\ A^C\ ,\ A'\right)$ نشان داده می‌شود، عدم وقوع حادثه را نشان می‌دهد. بنابراین روابط زیر برقرار است؛



$P(A\cap A')=0 \quad \Rightarrow$ دو پیشامد A و A' ناسازگارند.

$P(A)+P(A')=1 \quad \Rightarrow \quad P(A)=1-P(A')\ ,\ P(A')=1-P(A)$ دو پیشامد A و A' یک گروه کامل حوادث هستند؛

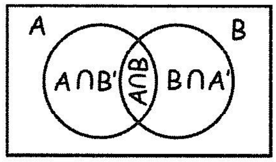
$$P(A\cup A')=\underbrace{P(A)+P(A')}_{1}-\underbrace{P(A\cap A')}_{0}=1$$

۶ـ روابط زیر برقرار می‌باشند:

$$\begin{cases}(A\cup B)'=(A'\cap B')\\(A'\cup B')'=(A\cap B)\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}(A\cap B)'=(A'\cup B')\\(A'\cap B')'=(A\cup B)\end{cases}$$

۷ـ اگر A و B دو حادثه باشند چون $(A\cap B')$ و $(A\cap B)$ ناسازگارند روابط زیر برقرار می‌باشند:

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B')$$
$$P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap A')$$
$$P(A')=P(A'\cap B)+P(A'\cap B')$$
$$P(B')=P(B'\cap A)+P(B'\cap A')$$

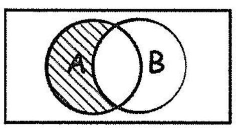


۸ـ اگر از بین جفت‌های $(A\,,B)$ ، $(A\,,B')$، $(A'\,,B')$، $(A'\,,B)$، یک جفت مستقل باشند آن‌گاه بقیه نیز مستقل‌اند.

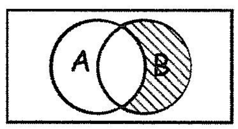
۹ـ احتمال تفاضل دو پیشامد عبارتست از:

احتمال وقوع فقط A	$P(A-B)=P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$ ؛
احتمال وقوع فقط B	$P(B-A)=P(B\cap A')=P(B)-P(A\cap B)$ ؛
احتمال وقوع فقط یک حادثه بین A و B یا تفاضل متقارن	$P(A\Delta B)=P(A-B)+P(B-A)=P(A\cap B')+P(B\cap A')$ ؛

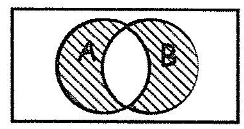
به شکل‌های زیر توجه کنید:



(A-B)



(B-A)



(AΔB)=(A-B)+(B-A)

۱۰ـ اگر A و B دو حادثه باشند داریم:

اگر $A\subset B \Rightarrow P(A)\le P(B)$

۱۱ـ هرگاه حوادث A_i از هم مستقل باشند برای محاسبه $P(A_1\cup A_2....\cup A_k)$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$P(A_1\cup A_2....\cup A_k)=1-P(A_1\cup A_2....\cup A_k)'=1-P(A'_1\cap A'_2....\cap A'_k)=1-P(A'_1)P(A'_2)...P(A'_k)$$

مثال ۱: احتمال این‌که یک مسأله ریاضی را حسن حل کند، 0.4 و احتمال این که حسین حل کند، 0.5 است. احتمال این که مسأله حل شود برابر است با: (اقتصاد ۸۱)

۱) 0.2 ۲) 0.7 ۳) 0.8 ۴) 0.9

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

بنابرنکتهٔ ۴:

پیشامد آن که حسن مسأله را حل کند :A

پیشامد آن که حسین مسأله را حل کند :B

$\longrightarrow$ Aو B مستقل‌اند

احتمال این‌که مسأله حل شود برابر است با: احتمال این که حسن مسأله را حل کند **یا** حسین مسأله را حل کند.

روش اول: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.4+0.5-(0.4\times 0.5)=0.7$

روش دوم: $P(A\cup B)=1-P(A\cup B)'=1-P(A'\cap B')=1-P(A')\times P(B')=1-0.6\times 0.5=0.7$

مثال۲: یک شرکت حفاری نفت فقط امکانات لازم برای حفر دو چاه را دارد. اگر در حفر اولین چاه به نفت برسد کار را تمام می‌کند و گرنه چاه دوم را حفر می‌کند. اگر احتمال این که در حفر هر چاه به نتیجه برسد، 0.2 باشد، احتمال این‌که شرکت حفاری به نتیجه برسد کدام است؟(حفاری چاه‌ها به طور مستقل از هم صورت می‌گیرد)

۱) 0.2 ۲) 0.8 ۳) 0.16 ۴) 0.36

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

به نتیجه رسیدن حفر چاه = (A_1) چاه اول $\cup$ (A_2) چاه دوم

$$P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(A_1 \cup A_2)' = 1 - P(A'_1 \cap A'_2) = 1 - P(A'_1) \times P(A'_2) = 1 - 0.8 \times 0.8 = 0.36$$

مثال۳: اگر $A_1, A_2, \cdots, A_n$ رویدادهای با $A_i \cap A_j = \phi$ باشند، در این صورت:

۱) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$ ۲) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

۳) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(A_i)$ ۴) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) > \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

بنابر نکتهٔ ۴ ، چون $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ناسازگارند بنابراین:

$$P(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n)$$

مثال۴: اگر $P(A) = 0.3$ و $P(B) = 0.2$ و A و B مستقل باشند، $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ برابر است با:

۱) 0.44 ۲) 0.50 ۳) 0.56 ۴) 0.667

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

بنابر نکتهٔ ۷ داریم:

$$\text{مستقل}(A, B) \Rightarrow (\bar{A}, \bar{B})\ \text{مستقل} \Rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = (1 - P(A)) \times (1 - P(B))$$
$$= (1 - 0.3)(1 - 0.2) = (0.7)(0.8) = 0.56$$

مثال۵: احتمال به صدا درآمدن هر یک از سه آژیر خطر مستقلی که در یک فروشگاه نصب شده‌اند به هنگام آتش‌سوزی برابر 0.95 است. احتمال آن که به هنگام بروز آتش‌سوزی حداقل یکی از سه آژیر خطر به صدا درآید، چقدر است؟

۱) 0.15 ۲) $(0.95)^3$ ۳) $1 - (0.05)^3$ ۴) $1 - (0.95)^3$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

پیشامد آن که حداقل یکی از سه آژیر خطر به صدا در آید: $A_1 \cup A_2 \cup A_3$

پیشامد آن که هیچ‌یک از سه آژیر خطر به صدا در نیاید : $(A_1 \cup A_2 \cup A_3)'$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)' = 1 - P(A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3) = 1 - P(A'_1)P(A'_2)P(A'_3) = 1 - (0.05)^3$$

مثال۶: سه نفر A و B و C به ترتیب با احتمال 0.4 و 0.7 و 0.5 یک مسأله را حل می‌کنند. مطلوب است:

a) احتمال آن‌که فقط یکی مسأله را حل کند.

b) احتمال آن که مسأله حل شود.

حل a) :

P = P (A حل کند و B حل نکند و C حل نکند) + P (A حل نکند و B حل‌کند و C حل نکند) + P (A حل نکند و B حل نکند و C حل کند)

$$P = AB'C' + A'BC' + A'B'C = (0.4 \times 0.3 \times 0.5) + (0.6 \times 0.7 \times 0.5) + (0.6 \times 0.3 \times 0.5) = 0.36$$

حل b) :

حل شدن مسأله بدین معنا است که حداقل یکی مسأله را حل کند، بنابراین از مکمل آن استفاده می‌کنیم.

$$P = 1 - A'B'C' = 1 - (1 - 0.5)(1 - 0.7)(1 - 0.4) = 1 - (0.5)(0.3)(0.6) = 0.91$$

مثال۷: فرض کنید احتمال آن که در بیست سال آینده زن و شوهری زنده بمانند به ترتیب 0.7 و 0.4 باشد، مطلوبست محاسبه احتمال:

a) هردو زنده بمانند.

b) هیچکدام زنده نمانند.

c) احتمال آن‌که حداقل یکی زنده بماند (در بیست سال آینده شخصی زنده بماند)

d) فقط یکی زنده بماند.

e) فقط زن زنده بماند.

f) زن زنده بماند.

حل :

(a

A: پیشامد زنده ماندن شوهر 0.4

B: پیشامد زنده ماندن زن 0.7

دو پیشامد مستقل‌اند

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=0.4\times 0.7=0.28$

(b $P(A'\cap B')=P(A')\times P(B')=0.6\times 0.3=0.18$

(c

راه حل اول: $P(A\cup B)=1-P(A'\cap B')=1-$ (هیچکدام زنده نمانند) $=1-0.18=0.82$

راه حل دوم: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.4+0.7-(0.4)(0.7)=0.82$

(d $P(A'\cap B)+P(A\cap B')=P(A').P(B)+P(A).P(B')=(0.6)(0.7)+(0.4)(0.3)=0.54$

(e $P(A'\cap B)=P(A').P(B)=(0.6)(0.7)=0.42$

(f $P(B)=0.7$

در آزمایش حادثه A باعث وقوع حادثه B می‌گردد. کدام‌یک از عبارات زیر درباره احتمال‌های این حوادث صحیح است؟ (مدیریت ۷۱)

۱) $P(A)>P(B)$ ۲) $P(A)\le P(B)$ ۳) $P(A)\ne P(B)$ ۴) $P(A)\ge P(B)$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

بنابرنکته ۱۰، چون حادثه A باعث وقوع حادثه B شده است پس: $A\subset B \Rightarrow P(A)\le P(B)$

○مسائل مهم احتمال

مهمترین مسائل مربوط به احتمال عبارتند از:

پرتاب تاس

پرتاب سکه

پرتاب تاس وسکه

مسئله مهره‌ها

❍ پرتاب تاس

توجه کنید که در پرتاب m تاس فضای نمونه 6^m می‌باشد.

ردیف	سؤال و حل
a)	در پرتاب دوتاس احتمال ظاهر شدن مجموع 6 چقدر است؟ **حل :** حالات مساعد: $\{(1,5),(5,1),(4,2),(2,4),(3,3)\}$ حالات کل: 6^2 $\Rightarrow P(A)=\frac{5}{36}$ توجه کنید که زوج (3 , 3) یک بار باید نوشته شود.
b)	در پرتاب دوتاس احتمال ظاهر شدن مجموع 6 و تاس اول کمتر از 3 چقدر است؟ **حل :** حالات مساعد: $\{(1,5),(2,4)\}$ حالات کل: 6^2 $\Rightarrow P(A)=\frac{2}{36}$
C)	در پرتاب دوتاس احتمال آن‌که مجموع کمتر از 5 باشد و یکی از تاس‌ها کمتر از 2 باشد چقدر است؟ **حل :** حالات مساعد: $\{(1,3),(1,2),(1,1),(2,1),(3,1)\}$ حالات کل: 6^2 $\Rightarrow P(A)=\frac{5}{36}$
D)	در پرتاب سه تاس احتمال آن‌که نتایج متفاوت باشد؟ **حل :** $\frac{6}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{20}{36}$
e)	در پرتاب سه تاس احتمال آن‌که تاس اول و سوم یکسان و با تاس دوم متفاوت باشد؟ **حل :** $\frac{6}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$
f)	در پرتاب چهارتاس احتمال آن‌که تاس اول عدد4 باشد چقدر است؟ **حل :** $\frac{1}{6}\times\frac{6}{6}\times\frac{6}{6}\times\frac{6}{6}=\frac{1}{6}$
g)	در پرتاب 4 تاس احتمال آن‌که تاس اول عدد 4 باشد و تاس دوم و چهارم برابر باشد؟ **حل :** $\frac{1}{6}\times\frac{6}{6}\times\frac{6}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

h) در پرتاب چهار تاس احتمال آن‌که تاس اول و سوم یکسان و تاس دوم و چهارم یکسان باشند و با هم متفاوت باشند؟

حل :

$$\frac{6}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{216}$$

i) در پرتاب پنج تاس چقدر احتمال دارد:

ـ همه شماره‌ها فرد باشند:

حل :

$$\frac{3}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

ـ شماره‌های اول وسوم و پنجم یکسان باشند:

حل :

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{اول}}}{\frac{6}{6}} \times \frac{6}{6} \times \underset{\substack{\downarrow \\ \text{سوم}}}{\frac{1}{6}} \times \frac{6}{6} \times \underset{\substack{\downarrow \\ \text{پنجم}}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{36}$$

ـ فقط شماره‌های اول و سوم و پنجم یکسان باشند:

حل :

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{اول}}}{\frac{6}{6}} \times \frac{5}{6} \times \underset{\substack{\downarrow \\ \text{سوم}}}{\frac{1}{6}} \times \frac{4}{6} \times \underset{\substack{\downarrow \\ \text{پنجم}}}{\frac{1}{6}} = \frac{20}{6^4}$$

ـ فقط سه شماره یکسان باشند:

حل : چون در سؤال مشخص نشده کدام شماره‌ها یکسان باشند، ابتدا باید ترکیب‌های مختلف سه تاس از پنج تاس را انتخاب کنیم.

$$\binom{5}{3} \times \frac{6}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{200}{6^4}$$

ـ همه شماره‌ها متفاوت باشند:

حل :

$$\frac{6}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{120}{6^4}$$

نکته : در پرتاب چندتاس اگر بخواهیم نتایج یکسان در مراحل مختلف داشته باشیم کافی است مرحله اول را محاسبه کرده و به جای مراحل دیگر یکسان 1 می‌گذاریم.

پرتاب سکه

در پرتاب n سکه، فضای نمونه 2^n است.

ردیف	سؤال و حل
a)	در پرتاب 2 سکه احتمال ظاهرشدن نتایج یکسان چقدر است؟ **حل :** { (خ و خ) ، (ش و ش)} : حالات مساعد 2^2: حالت کل $\Rightarrow \quad P(A)=\frac{2}{4}$
b)	در پرتاب 3 سکه احتمال ظاهرشدن حداقل یک خط کدام است؟ **حل :** 2^3 : حالت کل P (حداقل یک خط) = 1 − P (همه شیر) $=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$
c)	در پرتاب چهار سکه احتمال آن‌که سکه اول خط ظاهر شود؟ **حل :** P (سکه اول خط) $=\frac{1}{2}\times\frac{2}{2}\times\frac{2}{2}\times\frac{2}{2}=\frac{1}{2}$
d)	در پرتاب دو سکه احتمال آن‌که نتایج متفاوت باشد، چقدر است؟ **حل :** { (ش و خ) ، (خ و ش) } : حالات مساعد 2^2: حالات کل $\Rightarrow \quad P(A)=\frac{2}{4}$

○پرتاب تاس و سکه

توجه کنید که تاس و سکه مستقل از هم بررسی می‌شوند.

ردیف	سؤال وحل
a)	در پرتاب یک تاس و یک سکه، احتمال آن‌که تاس 5 و سکه خط ظاهر شود؟ حل : P (سکه خط و تاس 5) = P (تاس 5) × P (سکه خط) $= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$
b)	در پرتاب سه تاس و یک سکه احتمال آن‌که خط و تاس اول و سوم یکسان ظاهر شوند؟ حل : $\frac{1}{2} \times \underset{\text{اول}}{\underset{\downarrow}{\frac{6}{6}}} \times \frac{6}{6} \times \underset{\text{سوم}}{\underset{\downarrow}{\frac{1}{6}}} = \frac{1}{12}$

○مسئله مهره‌ها

ردیف	سؤال و حل
a)	کیسه‌ای دارای 10 مهره از شماره 1 تا 10 است مهره‌ای انتخاب می‌کنیم. ـ احتمال آن‌که مهره 4 باشد؟ حل : حالات مساعد: $\{4\}$ حالات کل: $\{1, 2, \ldots, 10\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{10}$ ـ احتمال آن‌که مهره یک عدد بین 1 تا 10 باشد؟ حل : $P(A) = \frac{10}{10} = 1$ ـ احتمال آن‌که مهره زوج باشد؟ حل : حالات مساعد: $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ حالات کل: $\{1, 2, \ldots, 10\} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{10}$ ـ احتمال آن‌که مهره زوج و کمتر از 6 باشد؟ حل : حالات مساعد: $\{2, 4\}$ حالات کل: $\{1, 2, \ldots, 10\} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{10}$

b) کیسه‌ای شامل 4 مهره قرمز است و 5 مهره آبی است، مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم، احتمال آن‌که قرمز باشد؟

حل :

$$P(A) = \frac{\text{تعداد مهره قرمز}}{\text{تعداد کل مهره‌ها}} = \frac{4}{9}$$

---

c) کیسه‌ای شامل 4 مهره قرمز و 5 مهره آبی است، 2 مهره آبی از آن خارج می‌کنیم، سپس مهره‌ای خارج می‌کنیم احتمال آن‌که مهره قرمز باشد؟

حل :

آبی	قرمز
5	4

2 مهره آبی خارج →

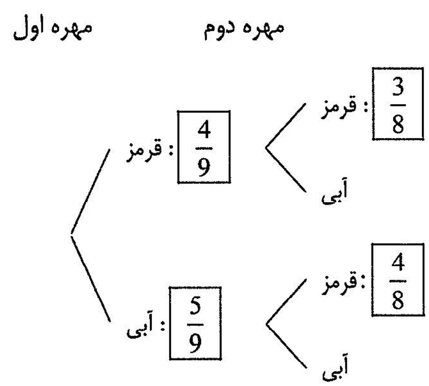
آبی	قرمز
3	4

$$P(\text{مهره قرمز}) = \frac{4}{7}$$

---

d) کیسه‌ای شامل 4 مهره قرمز و5 مهره آبی است، یک مهره را از آن خارج می‌کنیم سپس مهره‌ای دیگر از آن خارج می‌کنیم احتمال آن‌که مهره آخر خارج شده قرمز باشد؟

حل :

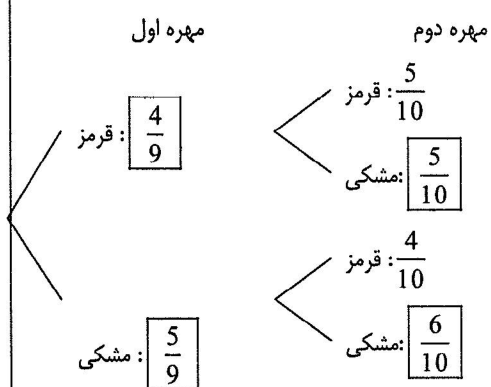


$$P(\text{قرمز}) = \frac{4}{9}\times\frac{3}{8}+\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{32}{72}=\frac{4}{9}$$

---

e) کیسه‌ای شامل 4 مهره قرمز، 5 مهره مشکی است، یک مهره از آن خارج کرده و به همراه یک مهره همرنگ آن دوباره داخل ظرف می‌گذاریم سپس مهره‌ای خارج می‌کنیم احتمال آن‌که این مهره مشکی باشد؟

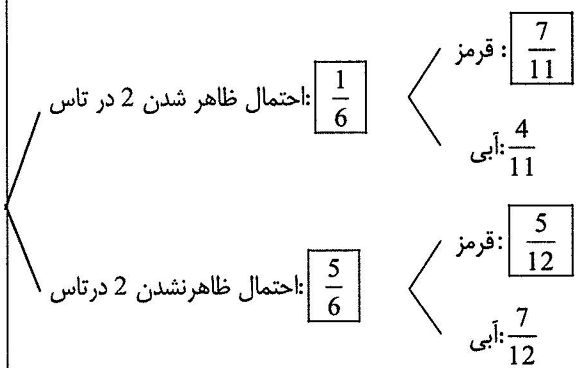
حل :



$$P(\text{مشکی}) = \frac{4}{9}\times\frac{5}{10}+\frac{5}{9}\times\frac{6}{10}=\frac{50}{90}=\frac{5}{9}$$

f) کیسه‌ای شامل 5 مهره قرمز و 4 مهره آبی است، تاسی را پرتاب می‌کنیم اگر 2 آمد، 2 مهره قرمز در غیر این صورت 3 مهره آبی به کیسه اضافه می‌کنیم، سپس مهره‌ای از ظرف خارج می‌کنیم احتمال آن‌که این مهره قرمز باشد؟

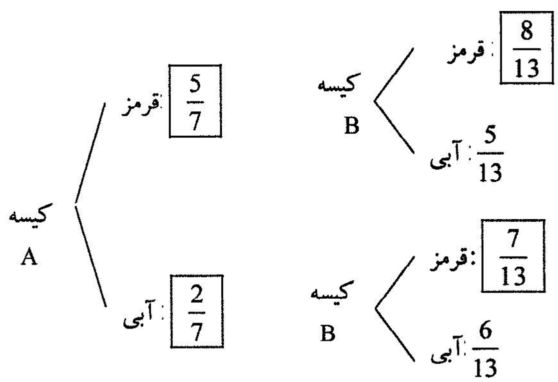
حل :



$$P\,(\text{قرمز}) = \frac{1}{6}\times\frac{7}{11}+\frac{5}{6}\times\frac{5}{12}$$

g) کیسه A شامل 5 مهره قرمز و 2 مهره آبی وکیسه B شامل 7 مهره قرمز و 5 مهره آبی است مهره‌ای از کیسه A خارج کرده‌ایم و به کیسهB ریخته‌ایم، سپس مهره‌ای از کیسه B خارج کنیم، مطلوبست احتمال این‌که این مهره قرمز باشد:

حل :



$$P(\text{قرمز}) = \frac{5}{7}\times\frac{8}{13}+\frac{2}{7}\times\frac{7}{13}=\frac{54}{91}$$

❍ انتخاب با جایگذاری و بدون جایگذاری

ردیف	سؤال وحل
(a	در جعبه‌ای 3 مهره قرمز، 2 مهره سبز و 5 مهره سفید وجود دارد. اگر 3 مهره به تصادف انتخاب کنیم، مطلوب است: (انتخاب پیش فرض بدون جایگذاری است) احتمال آن‌که هر سه قرمز باشند؟ **حل :** $\dfrac{\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}}$
	احتمال آن‌که هر سه همرنگ باشد؟ **حل :** $\dfrac{\binom{3}{3}+\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}}$
	احتمال آن‌که مهره‌ها همرنگ نباشند؟ **حل :** $\dfrac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}}$
	احتمال آن‌که حداقل یک مهره قرمز باشد؟ **حل :** P (حداقل یک قرمز) = 1 − P (قرمز نداشته باشیم) $= 1 - \dfrac{\binom{5+2}{3}}{\binom{10}{3}} = 1 - \dfrac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}}$

b)

در جعبه‌ای 3 مهره قرمز، 2 مهره سبز و 5 مهره سفید وجود دارد. اگر 3 مهره به تصادف با جای‌گذاری انتخاب کنیم، مطلوبست: (دقت می‌کنید در مسائل با جایگذاری ترتیب مهم بوده و مسئله را مرحله به مرحله حل می‌کنیم.)

احتمال آن‌که هر سه قرمز باشد؟

حل :

ق ق ق

$$\frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10}$$

احتمال آن‌که هر سه همرنگ باشند؟

حل :

$$\underbrace{\frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10}}_{\text{هر سه قرمز}} + \underbrace{\frac{2}{10} \times \frac{2}{10} \times \frac{2}{10}}_{\text{هر سه سبز}} + \underbrace{\frac{5}{10} \times \frac{5}{10} \times \frac{5}{10}}_{\text{هر سه سفید}}$$

در انتخاب با جایگذاری می‌توان از هر رنگ هر تعداد مهره خارج کرد.

احتمال آن‌که مهره‌ها همرنگ نباشند؟

حل : انتخاب‌های مجاز (سفید، سبز، قرمز)، (سبز، سفید، قرمز)، ...

$$\frac{3}{10} \times \frac{2}{10} \times \frac{5}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{5}{10} \times \frac{2}{10} + \dots = 3!\left(\frac{3}{10} \times \frac{2}{10} \times \frac{5}{10}\right)$$

احتمال آن‌که دو مهره قرمز باشد؟

حل : انتخاب‌های مجاز (سفید یا سبز، قرمز، قرمز)، (قرمز، سفید یا سبز، قرمز)، ...

$$\frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} + \dots = \frac{3!}{2!}\left(\frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{7}{10}\right)$$

احتمال آن‌که حداقل یک مهره قرمز باشد؟

حل :

P (حداقل یک قرمز) = 1 − P (قرمز نداشته باشیم)

$$= 1 - \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^3$$