۲ . ۳) معادلات همگن :

تعریف ۱ : تابع دومتغیری f(x,y) را همگن و از درجه n می نامییم هرگاه به ازای هر $\lambda > 0$ و به ازای هر زوج $(\lambda x, \lambda y), (x, y)$ که در حوزه تعریف تابع باشند، داشته باشیم :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

هرگاه معادله دیفرانسیل به شکل $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ باشد در صورتی آن را همگن می گوییم که $f(x, y)$ یک تابع همگن از درجه صفر باشد. معادله دیفرانسیل همگن را همواره می توان به صورت زیر بیان کرد :

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

هرگاه معادله دیفرانسیل به شکل $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ باشد در صورتی آن را همگن می گوییم که $N(x, y), M(x, y)$ توابع همگن هم درجه باشند.

برای حل معادلات همگن از تغییر متغیر $z = \frac{y}{x}$ استفاده می کنیم :

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$$

با جایگذاری در معادله $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ داریم :

$$z + x\frac{dz}{dx} = g(z) \Rightarrow x\frac{dz}{dx} = g(z) - z$$

که یک معادله جدایی پذیر است که به سادگی حل می گردد.

مثـــال : معادلـه : $(x^2+y^2)dx+2xydy=0$ همگـن اسـت زیـرا توابـع $M(x,y)=x^2+y^2$ و $N(x,y)=2xy$ هـر دو همگـن و از درجـه ۲ هسـتند. اگـر در معادلـه توابـع M , N همگـن و از درجه m باشند، آنگاه داریم :

$$M(x,y)=x^m M\left(1,\frac{y}{x}\right)$$

$$M(x,y)=x^m N\left(1,\frac{y}{x}\right)$$

در این صورت معادله $M(x,y)+N(x,y)y'=0$ به شکل زیر نوشته می شود :

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M\left(1,\frac{y}{x}\right)}{N\left(1,\frac{y}{x}\right)}$$

تعریف می کنیم :

$$F\left(\frac{y}{x}\right)=-\frac{M\left(1,\frac{y}{x}\right)}{N\left(1,\frac{y}{x}\right)}$$

آنگاه معادله همگن $M(x,y)+N(x,y)y'=0$ به صورت زیر درمی آید :

$$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (۲)$$

برای حل معادله (۲)، قرار می دهیم $v=\frac{y}{x}$ یا $y=xv$ آنگاه داریم :

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v$$

و با قراردادن در (۲) خواهیم داشت :

$$x\frac{dv}{dx}+v=F(v)$$

یا : $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dv}{F(v)-v}$ (۳)

معادله (۳) یک معادله دیفرانسیل جداپذیر است و اگر جواب عمومی آن $G(x,v,c)=0$ باشد، آنگاه جواب عمومی چنین است :

$$G\left(x,\frac{y}{x},c\right)=0$$

مثال : در معادله $x^2dy=(xy-y^2)$ با شرط $g(1)=1$ هنگامی که $x=e$ است، g را بیابید؟

حل : معادله همگن است بنابراین از تغییر متغیر $V=\dfrac{y}{x}$ استفاده می کنیم :

$$v+xv'=(v-v^2)\Rightarrow\frac{xdv}{dx}=-v^2\Rightarrow\frac{dv}{-v^2}=\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{v}=Lncx\Rightarrow\frac{x}{y}=Lncx$$

$$y(1)=1\Rightarrow c=e\Rightarrow y(x)=\frac{x}{Lnxe}$$

$$\Rightarrow y(e)=\frac{e}{Lne^2}=\frac{e}{2}$$

مثال :

در تمرینات ۱ تا ۱۲ برای معادلاتی که همگن هستند جواب عمومی را به دست آورید:

۱- $(5x-2y)y'-y=2x$

۲- $x\cos\left(\frac{x}{y}\right)y'=x\sin\left(\frac{x}{y}\right)+y\cos\left(\frac{y}{x}\right)$

۳- $(x^2+y^2)dy+2x(x+y)dx=0$

۴- $y(x^2-xy+y^2)+xy'(x^2+xy+y^2)=0$

۵- $xy'=y+\sqrt{x^2+y^2}$

حل :

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx}+v=\frac{v+2}{5-2v} \quad \Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx}=\frac{2(v-1)^2}{5-2v}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{x}=\frac{(5-2v)}{2(v-1)^2} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dx}{dx}=\int\frac{(5-2v)}{2(v-1)^2}dv$$

با انتگرال گیری رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\Rightarrow \quad c+\ln x=-\ln(v-1)-\frac{3}{2(v-1)}$$

به‌جای v، مقدار $\frac{y}{x}$ را جایگزین می‌کنیم:

$$\Rightarrow \quad \ln|x|+\ln\left|\frac{y}{x}-1\right|=\ln|y-x|=\frac{-3x}{2(y-x)}-c \quad \Rightarrow \quad y-x=e^{-c}e^{\frac{-3x}{2(y-x)}}$$

$$\Rightarrow \quad x-y=Ae^{\frac{-3x}{2(y-x)}} \quad , \quad A=-e^{-c}$$

۲)

$$\begin{cases} M(x,y) = x\cos\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{همگن مرتبه اول} \\ N(x,y) = x\sin(\dfrac{y}{x}) + y\cos(\dfrac{y}{x}) & \text{همگن مرتبه اول} \end{cases}$$

معادله همگن مرتبه اول است

با تقسیم دو طرف معادله بر $x\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)$:

$$y' = \frac{dy}{dx} = tg\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right) \quad , \quad \frac{y}{x} = v \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} = tg(v) + v$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{dv}{tgv} \quad \Rightarrow \quad \ln|x| = \ln|\sin v| + \ln c$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left|\frac{x}{\sin v}\right| = \ln c \quad \Rightarrow \quad x = c\sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

۳)

$$(x^2 + y^2)dx + 2x(x+y)dx = 0$$

$$\begin{cases} N(x,y) = x^2 + y^2 & \text{همگن مرتبه دوم} \\ M(x,y) = 2x(x+y) & \text{همگن مرتبه دوم} \end{cases}$$

معادله فوق همگن مرتبه دوم است

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v = \frac{-2x(x+y)}{x^2 + y^2} = \frac{-2(1 + {y}/{x})}{1 + \left({y}/{x}\right)^2} = \frac{-2(1+v)}{1+v^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{-(1+v^2)}{v^3 + 3v + 2} \quad \Rightarrow \quad \ln|x| + c = -\frac{1}{3}\ln\left|v^3 + 3v + 2\right|$$

$$\Rightarrow \quad 3\ln|x| + \ln\left|v^3 + 3v + 2\right| = \ln\left|v^3x^3 + 3x^3v + 2x^3\right| = -3c = c_1 \quad \Rightarrow$$

با جایگذاری $v = \dfrac{y}{x}$ رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\ln\left|y^3 + 3x^2y + 2x^3\right| = c_1$$

$$\Rightarrow \quad y^3 + 3x^2y + 2x^3 = c_2 \quad , \quad c_2 = e^{c_1}$$

۵) $$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^۲ + y^۲}}{x} = \frac{y}{x} + \sqrt{۱ + \left(\frac{y}{x}\right)^۲}$$

معادله همگن مرتبه اول است با $y = vx$:

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} + v = v + \sqrt{۱ + v^۲} \Rightarrow \quad \frac{dv}{\sqrt{۱+v^۲}} = \frac{dx}{x}$$

با انتگرال‌گیری رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\Rightarrow \quad \ln\left|v + \sqrt{۱+v^۲}\right| = \ln|x| + c = \ln|Ax| \quad , \quad c = \ln A$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{x} + \sqrt{۱ + \left(\frac{y}{x}\right)^۲} = Ax \Rightarrow \quad y + \sqrt{x^۲ + y^۲} = Ax^۲$$

۲ . ۴) معادلات کامل :

اگر دسته منحنی $f(x,y) = c$ داده شده باشد معادلهٔ دیفرانسیل آن را می توان به شکل $df = 0$ و یا $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$ نوشت.

مثلاً معادلهٔ دیفرانسیل دسته منحنی $x^2y^3 = c$ به صورت $2xy^3dx + 3x^2y^2dy = 0$ اسـت. حـال، وضعیت عکس را درنظر می گیریم و بحث را با معادلهٔ زیر شروع می کنیم :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (۱)$$

هرگاه تابع $f(x,y)$ وجود داشته باشد به قسمی که :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N \qquad (۲)$$

معادله را کامل می گوییم معادله (۱) را می توان به شکل

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \quad \text{یا} \quad df = 0$$

نوشت که جواب عمومی آن عبارت است از :

$$f(x,y)=c$$

در چنین حالتی عبارت $Mdx+Ndy$ را دیفرانسیل کامل و معادلهٔ (۱) را معادلهٔ دیفرانسیل کامل می گوییم.

شرط لازم و کافی برای اینکه معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ یک معادله دیفرانسیل کامل باشد این است که :

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

مهم

در این صورت تابعی مانند $f(x,y)$ موجود است به شکلی که :

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=Mdx+Ndy=0\Rightarrow f=c$$

روش محاسبه :

روش حل این معادله به صورت زیر است :

۱) هر کدام از معادلات $\frac{\partial f}{\partial y}=N \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x}=M$ را که ساده تر باشد انتخاب می کنیم.

۲) با فرض اینکه $\frac{\partial f}{\partial x}=M$ از آن داریم :

$$f=\int Mdx=......+g(y)$$

۳) از عبارت فوق نسبت به y مشتق می گیریم :

$$\frac{\partial f}{dy} = ... + g'(y) = N$$

۴) از تساوی فوق $g'(y)$ را به دست آورده و در نتیجه $g(y)$ به دست می آید.

۵) با تعیین $f, g(y)$ به دست می آید و جواب معادله به صورت $f = c$ خواهد بود.

در برخی حالات می توان برای حل این معادلات کلیه حملات را دسته بندی و انتگرال گیری کرد.

- هر معادله دیفرانسیل جداشدنی کامل است ولی هر معادله دیفرانسیل کامل جداشدنی نیست.

معادلات کامل

در تمرینات زیر برای معادلاتی که کامل هستند جواب عمومی را به دست آورید:

۱- $(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 2y)dy = 0$

۲- $(3x^2y + y^2)dx = (-x^3 + 2xy)dy$

۳- $(x - y)dx + (-x + y + 2)dy = 0$

۴- $(e^x \cos y - x^2)dx + (e^y \sin x + y^2)dy = 0$

➢ **حل:**

۱) $M(x,y) = 3x^2 + 4xy$ و $N(x,y) = 2x^2 + 2y$ است:

$M_y = 4x = N_x \Rightarrow$ معادله کامل است.

$$\Rightarrow f(x,y) = \int_{y_0}^{y} N(x,s)dx + \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt = c$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \int_0^y [2(0) + 2s]ds + \int_0^x (3t^2 + 4ty)dx = c$$

$$\Rightarrow y^2\Big|_0^y + (x^3 + 2x^2y)\Big|_0^x = c \Rightarrow y^2 + x^3 + 2x^2y = c$$

۳) $N(x,y) = -x + y + ۲ \quad , \quad M(x,y) = x - y$

$M_y = -۱ = N_x \quad \Rightarrow$ معادله کامل است

$$f(x,y) = \int_{y_۰}^{y} N(x,s)ds + \int_{x_۰}^{x} M(t,y)dt$$

$$= \int_{۰}^{y} (-۰ + s + ۲)ds + \int_{۰}^{x} (t - y)dt$$

$$= \left(\frac{y^۲}{۲} + ۲y\right) + \left(\frac{x^۲}{۲} - xy\right) = c$$

۴) $N(x,y) = e^y \sin x + y^۲ \quad , \quad M(x,y) = e^x \cos y - x^۲$

$M_y = -e^x \sin y \quad , \quad N_x = e^y \cos x$

$M_y \neq N_x \quad \Rightarrow$ معادله کامل نیست

۲ . ۵) عامل انتگرال ساز (معادلات غیرکامل)

هرگاه معادله $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ کامل نباشد در برخی از موارد می توان با ضـرب یـک عامل به طرفین معادله آن را به معادله دیفرانسیل کامل تبدیل کرد که این عبارت را عامل انتگـرال ساز می نامیم.

اگر μ یک عامل انتگرال ساز و معادله فوق غیرکامل باشد معادله زیر کامل خواهد بود:

$$\mu M dx + \mu N dy = 0$$

۱) هرگاه $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$ باشند (جواب بر حسب x) :

عامل انتگرال ساز $\mu = e^{\int f(x)dx}$