

فصل چهارم

مولدهای اعداد تصادفی غیریکنواخت

قبلاً یاد گرفتیم که برای تولید اعداد تصادفی با توزیع یکنواخت $U[0, 1]$ و در بازه $[A, B]$ فرمول زیر وجود دارد:

$$Y_i = A + (B - A)U_i$$

1

در این فرمول U_i یک عدد تصادفی یکنواخت در بازه $[0, 1]$ است که در این فرمول قرار گرفته و اعداد تصادفی یکنواخت در بازه $[A, B]$ را تولید میکند.

در این فصل یاد میگیریم چگونه اعداد تصادفی‌ای تولید کنیم که توزیع‌های غیریکسان و خاصی داشته باشند، مثلاً توزیع‌های نرمال، نمایی، گاما و غیره. در شبیه‌سازی برای تولید بسیاری از اعداد تصادفی از مولدهایی استفاده میکنیم که خود این مولدها بر اساس توزیع‌های مشخصی هستند. برای تولید اعداد تصادفی روشهای مختلفی وجود دارد که ۴ روش اساسی عبارتند از:

۱- روش تبدیل معکوس

۲- روش حذفی

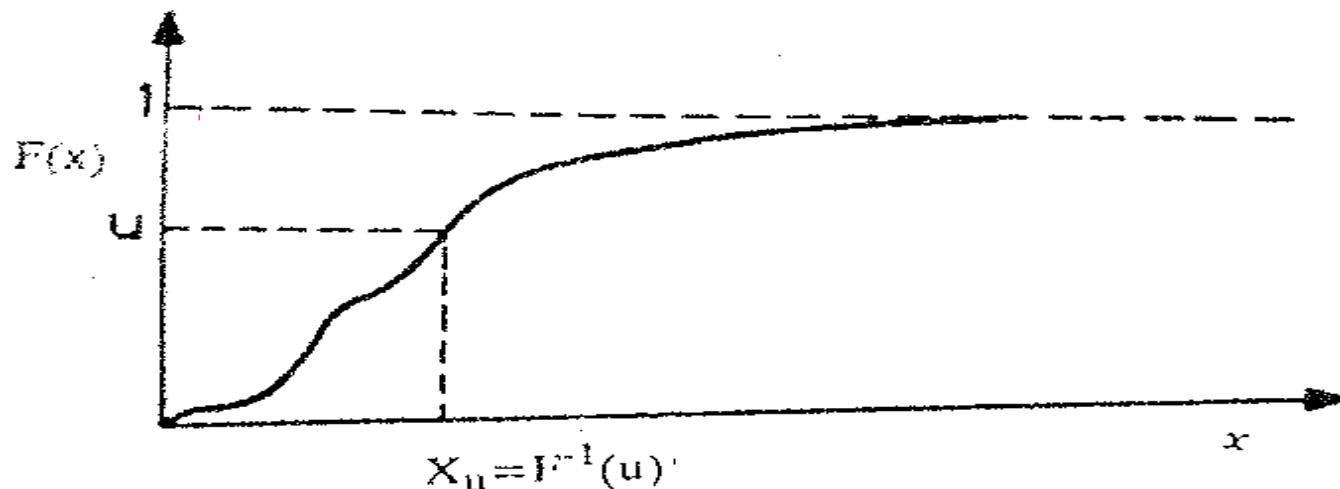
۳- روش به کارگیری خواص ویژه

متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع تجمعی $F(x)$ است و اگر بخواهیم n نمونه $X_1, X_2, \dots, X_n$ از این تابع توزیع تجمعی پیروی کنند، احتمال اینکه نمونه x در بازه (X_1, X_2) باشد، عبارت است از:

$$\text{for all } X_1 \leq X_2, F(X_2) - F(X_1)$$

و چون $F(x)$ پیوسته است همه مقادیر بین 0 و 1 را دربر میگیرد و بنابراین برای هر عدد تصادفی $u, 0 \leq u \leq 1$ است و یک X_u واحد وجود دارد که $F(X_u) = u$.

از طرفی داریم: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ و $f(x) \geq 0$ میباشد و همچنین میدانیم که $0 \leq F(x) \leq 1$ همیشه برقرار است. اگر فرض کنیم که برای هر عدد تصادفی $0 \leq u \leq 1$ داریم $F(X_u) = U$ آنگاه تابع معکوس میشود: $F^{-1}(u)$ که برابر $X_u = F^{-1}(u)$ است. یعنی:



شکل ۵-۱) تابع توزیع تجمعی پیوسته $F(x)$

اگر n عدد تصادفی یکنواخت تولید کنیم: $U_1, U_2, \dots, U_n$ که در محدوده $[0, 1]$ باشند، تبدیل معکوس آنها میشود:

$$F^{-1}(U_1), F^{-1}(U_2), \dots, F^{-1}(U_n)$$

به طور کلی میتوان روش تبدیل معکوس را به صورت زیر تعریف کرد:

$$X_i = F^{-1}(U_i) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

که U_i یک عدد تصادفی یکنواخت است و الگوریتم زیر برای آن برقرار است:

الف) عدد تصادفی یکنواخت U_i در محدوده ۰ و ۱ را تولید کنید.

ب) تابع معکوس $X_i = F^{-1}(U_i)$ را بیابید.

ج) X_i یک عدد تصادفی (R_i) از توزیع $F(x)$ است.

4 **مثال) تابع توزیع یکنواخت (Uniform)** فرض کنید متغیر تصادفی x در فاصله دلخواه $[a, b]$ موجود پیوسته و دارای توزیع آماری یکنواخت باشد. پس داریم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

الف) تابع $F(x)$ را به دست می آوریم.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & b < x \end{cases}$$

ب) تابع $F(x)$ را برابر u قرار می دهیم و x را از روی این تساوی به دست می آوریم:

$$u = \frac{X - a}{b - a} \xrightarrow{\text{فرمول کلی}} X_i = a + U_i (b - a)$$

مثال) برای تولید سرعت هواپیما در محدوده $[۲۰۰ \text{ و } ۳۰۰]$ با فرمول تبدیل معکوس داریم:

$$X_i = 200 + U_i (300 - 200) = 200 + 100U_i$$

$$X_1 = 200 + U_1 (100) \xrightarrow{\text{if } U_1=0.5} X_1 = 250$$

$$X_2 = 200 + U_2 (100) \xrightarrow{\text{if } U_2=0.4} X_1 = 240$$

و همین طور اعداد تصادفی دیگر را تولید میکنیم.

مثال) تابع توزیع نمایی متغیر تصادفی x دارای توزیع نمایی است. تابع چگالی احتمال آن عبارت است از:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

گام (۱) یافتن $F(x)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int (\lambda e^{-\lambda t})dt = e^{-\lambda t}]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

گام (۲) قرار دادن $U = 1 - e^{-\lambda x}$

گام (۳) یافتن x :

$$1 - e^{-\lambda x} = U$$

$$e^{-\lambda x} = 1 - U$$

$$-\lambda x = \ln(1 - U)$$

$$x = \frac{\ln(1 - U)}{-\lambda}$$

$$X_i = \frac{-1}{\lambda} \ln(1 - R_i)$$

گام (۴) فرمول کلی:

چون U_i دارای توزیع یکنواخت بین $[0, 1]$ است پس $(1 - U_i)$ هم دارای توزیع یکنواخت است لذا در فرمول فوق به جای $(1 - U_i)$ میتوان از U_i استفاده کرد یعنی:

$$X_i = \frac{-1}{\lambda} \ln(U_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

مثال) تابع توزیع ویبل (Weibull) فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع ویبل است. تابع چگالی احتمال آن عبارت است از:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha^\beta} x^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} & x \geq 0, \alpha > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

گام (۱) یافتن $F(x)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_0^x \frac{\beta}{\alpha^\beta} t^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} dt = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}, \quad x \geq 0$$

گام (۲) قرار دادن

$$U = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}$$

گام (۳) یافتن x

$$X = -\alpha \left[\sqrt[\beta]{\ln(1 - U)} \right]$$

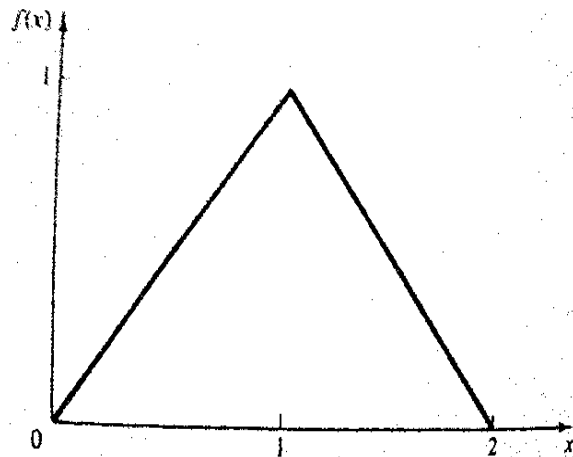
$$X_i = -\alpha \left[\sqrt[\beta]{\ln(1 - U_i)} \right]$$

گام ۴) فرمول کلی

متغیر تصادفی X دارای توزیع مثلثی است. تابع چگالی احتمال آن عبارت است از:

مثال) تابع توزیع مثلثی

$$f(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & , 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & , \text{else} \end{cases}$$



گام (۱) یافتن $F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 < x \leq 1 \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1 [= 1 - \frac{(2-x)^2}{2}] & 1 < x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

گام (۲) قرار دادن

$$U = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

گام (۳) یافتن x

$$X = \begin{cases} \sqrt{2U} & 0 \leq U \leq \frac{1}{2} \\ 2 - \sqrt{2(1-U)} & \frac{1}{2} \leq U \leq 1 \end{cases}$$

گام ۴) فرمول کلی

$$X_i = \begin{cases} \sqrt{2U_i} & 0 \leq U_i \leq \frac{1}{2} \\ 2 - \sqrt{2(1 - U_i)} & \frac{1}{2} \leq U_i \leq 1 \end{cases}$$

خلاصه:

روش تبدیل معکوس	
گام	کاری که در این گام انجام می‌دهیم
۱	یافتن $F(x)$
۲	قرار دادن $U=F(x)$
۳	یافتن x
۴	فرمول کلی

نمونه سوالات (تبدیل معکوس):

(۱) در صورتی که تابع جرم چگالی احتمال توزیع یکنواخت به صورت زیر باشد، تبدیل معکوس برای تولید رقم تصادفی R کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) $X = b + (b-a)R$ ب) $X = a + (b-a)R$ ج) $X = (a-b)R$ د) $X = (b-a)R$

(۲) روش تبدیل معکوس جهت تولید مقادیر تصادفی را در مورد کدامیک از توزیع های زیر نمی توان به کار برد؟

الف) توزیع نمایی ب) توزیع یکنواخت ج) ☺ توزیع نرمال د) توزیع ویبول

۳) متغیر تصادفی X را در نظر بگیرید که دارای pdf زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} X & 0 \leq X \leq 1 \\ 2 - X & 1 \leq X \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

اولاً با استفاده از روش تبدیل معکوی تابع تولید متغیر تصادفی X را نوشته و برای $R=0.67$ عدد تصادفی مناسب با توزیع فوق را تولید کنید؟ (۱/۵ نمره)

۴) برای تولید مقدار تصادفی برای توزیع نرمال از کدام روش نمیتوان استفاده کرد؟

الف) شیوه جدولگرد ب) تبدیل مستقیم ج) تبدیل معکوس د) شیوه جدولگرد و تبدیل مستقیم

۵) الف) با استفاده از روش تبدیل معکوس رابطه ای برای تولید مقادیر تصادفی برای توزیع هندسی بیابید.

ب) با عدد تصادفی $R=0.932$ یک مقدار تصادفی برای توزیع هندسی با $p=0.5$ و $q=1$ بسازید.

۶) کدام روش برای ایجاد مقادیر شبه تصادفی نرمال امکان پذیر نمی باشد؟

الف) تبدیل معکوس ب) تبدیل مستقیم ج) روش پیچش د) شیوه جدولگرد

۷) برای تولید اعداد تصادفی دارای توزیع یکنواخت بین b و a با روش تبدیل معکوس، کدام رابطه مناسب است؟
(R عدد تصادفی با توزیع یکنواخت بین 0 و 1 است)

الف) $x = a + (a - b)R$ ب) $x = b - (a + b)R$ ج) $x = a + (b - a)R$ د) $x = aR + b$

۸) با استفاده از روش تبدیل معکوس رابطه تولید مقادیر تصادفی برای توزیع نمایی با پارامتر λ را به دست آورده، برای $\lambda = 2$ و اعداد تصادفی $R1 = 0.1306$ و $R2 = 0.6597$ مقادیر تصادفی مربوطه را بیابید.

۹) برای کدامیک از توزیع های زیر، از روش تبدیل معکوس نمیتوان استفاده کرد؟

الف) نمایی ب) هندسی ج) نرمال د) گاما

۱۰) با استفاده از روش تبدیل معکوس یک رابطه برای تولید مقدار تصادفی برای توزیع هندسی بیابید و برای عدد تصادفی $R=0.85$ و $R=0.126$ مقدار تصادفی مربوط به توزیع هندسی را بیابید.

۱۱) اگر R_i یک عدد تصادفی یکنواخت در بازه 0 و 1 باشد، متغیر تصادفی x دارای توزیع نمایی با پارامتر λ خواهد بود اگر ...

$$\text{الف) } x = \lambda \ln(1 - R_i) \quad \text{ب) } x = -\lambda \ln(1 - R_i)$$

$$\text{ج) } x = \frac{1}{\lambda} \ln(1 - R_i) \quad \text{د) } x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - R_i) \quad (\odot)$$

۱۲) با فرض اینکه cdf متغیر تصادفی x که دارای توزیع نمایی می باشد برابر $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, 0 \leq x$ باشد، تبدیل معکوس آن برابر خواهد بود با: R یک عدد تصادفی دارای توزیع یکنواخت در بازه $[0, 1]$ است.

$$\text{الف) } x = \lambda \ln(1 - R) \quad \text{ب) } x = -\lambda \ln(1 - R)$$

$$\text{ج) } x = \frac{1}{\lambda} \ln(1 - R) \quad \text{د) } x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - R) \quad (\odot)$$

۱۳) تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی x به صورت $F(x) = 1 - e^{-4x}, 0 \leq x$ تعریف شده است. تبدیل معکوس آن برابر خواهد بود با: (R یک عدد تصادفی دارای توزیع یکنواخت در بازه $[0, 1]$ است.)

الف) $x = 4 \ln(1 - R)$

ب) $x = -4 \ln(1 - R)$

ج) $x = \frac{1}{4} \ln(1 - R)$

د) $x = -\frac{1}{4} \ln(1 - R)$

۱۴) روش تبدیل معکوس برای کدامیک از توزیع های آماری زیر قابل استفاده نیست؟

الف) توزیع مثلثی ب) توزیع نرمال ج) توزیع نمایی د) توزیع یکنواخت

۱۵) برای کدامیک از توزیع های زیر از روش تبدیل معکوس نمیتوان استفاده کرد؟

الف) نمایی ب) هندسی ج) نرمال د) گاما

۱۶) با استفاده از تبدیل معکوس یک رابطه برای تولید مقدار تصادفی برای توزیع هندسی بیابید و برای عدد تصادفی $R=0.85$ و $R=0.126$ مقدار تصادفی مربوط به توزیع هندسی را بیابید.

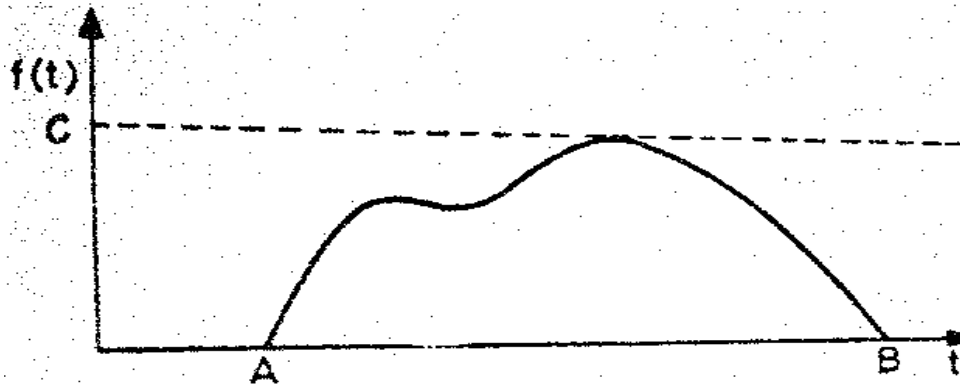
۲- روش حذفی

این روش برای یافتن نمونه‌هایی از یک توزیع غیریکنواخت است، اساس آن بر مبنای تولید اعداد تصادفی یکنواخت به طور مکرر است و فقط آنهایی که دارای شرط خاصی هستند قبول میشوند. مثلاً از بین اعداد تصادفی تولیدی آنهایی را انتخاب میکنیم که در بازه مورد نظر ما قرار دارند و بقیه را حذف میکنیم.

در این روش تابع چگالی احتمال $f(t)$ باید در محدوده (A, B) غیرصفر باشد و تابع دارای محدوده زیر C باشد.

$$f(t) \leq c, \quad A \leq t \leq B$$

پس داریم:



شکل ۵-۲) تابع چگالی احتمال $f(x)$

روش حذفی شامل مراحل زیر است:

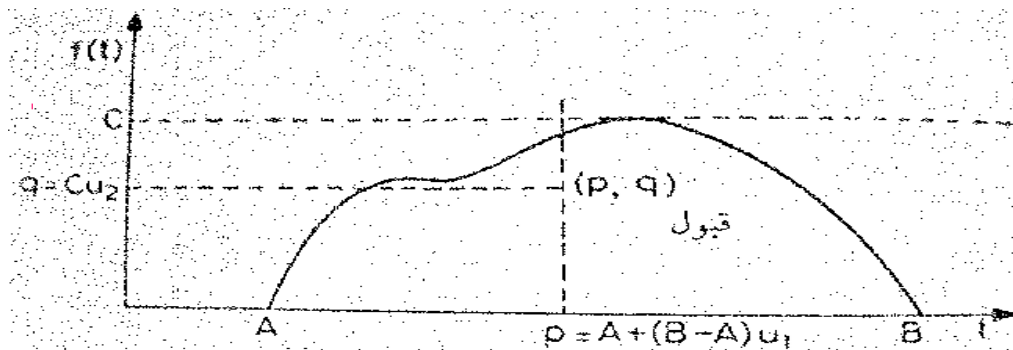
گام ۱) یک جفت عدد تصادفی یکنواخت در محدوده $[۰ و ۱]$ به نام های $U1$ و $U2$ تولید می کنیم.

گام ۲) $U1$ یک نقطه مثل p را روی محور افقی با مختصات روبه رو مشخص میکند. $P = A + (B - A).U_1$

گام ۳) $U2$ یک نقطه مثل q را روی محور عمودی با مختصات روبه رو مشخص میکند. $Q = C.U_2$

گام ۴) اگر $q > f(p)$ باشد، اعداد تصادفی تولیدی را حذف میکنیم و برمیگردیم به مرحله ۱، در غیر اینصورت p به عنوان یک مقدار با توزیع داده شده خواهد بود.

این روال تکرار میشود تا تمامی نمونه ها تولید شوند. در این نمونه ها x بین مقادیر $[A و B]$ تغییر میکند یعنی تغییر متغیر تصادفی مربوطه محدود است پس در این روش میتوان توزیع با شکل های مختلف داشت و نقاط قبول شده مطابق تابع $f(t)$ خواهد بود.



شکل ۵-۳ یافتن نقطه (p, q) در تابع چگالی احتمال

مثال بر اساس روش حذفی، مولد تصادفی با توزیع یکنواخت بین ۱ و ۰/۲۵ را برای تولید X بنویسید. مراحل حل شامل گام های زیر است:

گام ۱) تولید عدد تصادفی R

گام ۲) اگر $R \geq \frac{1}{4}$ است، $x=R$ و به گام ۴ می رویم.

گام ۳) حذف R و به گام ۱ می رویم.

گام ۴) اگر عدد تصادفی یکنواخت دیگری نیاز است، به گام ۱ باید به برویم.

مثال) با استفاده از روش حذفی، برای اعداد با توزیع پواسن یک روال تولید اعداد تصادفی بنویسید:

$$p(n) = P(N = n) = \frac{e^{-\alpha} \cdot \alpha^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

با استفاده از ارتباط بین توزیع نمایی (پیوسته) و توزیع پواسن (گسسته)، روال تولید یک عدد تصادفی پواسن N عبارت است از:

گام ۱) $n=0$ و $P=1$

گام ۲) تولید عدد تصادفی R_{n+1} و قرار دادن $P \cdot R_{n+1}$ به جای P

گام ۳) اگر $P < e^{-\alpha}$ است پس $N=n$ و گرنه n حذف میشود ($n=n+1$) و سپس به گام ۲ میرویم.

مثال) برای تولید ۳ متغیر پواسن با میانگین $\alpha = 0.2$ و روش حذفی، اول $e^{-\alpha} = e^{-0.2} = 0.8187$ را محاسبه میکنیم. سپس مراحل زیر را طی می‌کنیم:

گام ۱) $n=0$ و $p=1$

گام ۲) $R_1 = 0.4357$ و $P = 1 \times R_1 = 0.4357$

گام ۳) از آنجا که $P = 0.4357 < 0.8187$ است پس $N=0$ قبول میشود.

$N = 0, \quad R_1 = 0.4357$

گام ۱) $n=0$ و $P=1$

گام ۲) $R_1 = 0.8353$ و لذا $P = 1 \times R_1 = 0.8353$

گام ۳) چون $P = 0.8353 < 0.8187$ نیست پس $N=0$ حذف میشود و با $n=1$ به گام ۲ میرویم.

گام ۱) $n=1$ و $P=1$

گام ۲) $R_2 = 0.9952$ و لذا $P = R_1 \times R_2 = 0.8313$

گام ۳) چون $P = 0.8313 < 0.8187$ نیست پس $N=1$ حذف میشود و با $n=2$ به گام ۲ میرویم.

گام ۱) $n=2$ و $P=1$

گام ۲) $R_3 = 0.8004$ و لذا $P = R_1 \times R_2 \times R_3 = 0.6654$

گام ۳) چون $0.8187 > 0.6654 = P$ است پس $N=2$ قبول میشود.

$$N = 2, \quad R_3 = 0.8004$$

کلاً به طور خلاصه میشود:

n	R_{n+1}	P	قبول یا حذف	نتیجه
۰	0.4357	0.4357	قبول	$N=0$
۰	0.4146	0.4146	قبول	$N=0$
۰	0.8353	0.8353	حذف	
۱	0.9952	0.8313	حذف	
۲	0.8004	0.6654	قبول	$N=2$

مثال) گامهای تولید عدد تصادفی با توزیع گاما و روش حذفی با فرض پارامتر مقیاس θ و پارامتر شکل β عبارت است از:

$$\text{گام ۱) محاسبه } a = (2\beta - 1)^{1/2} \text{ و } b = 2\beta - \ln 4 + 1/a$$

$$\text{گام ۲) تولید } R_1 \text{ و } R_2$$

$$\text{گام ۳)} \quad X = \beta \left[\frac{R_1}{1-R_1} \right]^a \text{ محاسبه}$$

گام ۴) اگر $x > b - \ln(R_1^2 R_2)$ باشد لذا x حذف میشود و به مرحله ۲ می رویم.

$$\text{گام ۵)} \quad X = X/\beta\theta \quad (\text{با میانگین } 1/\theta \text{ و واریانس } 1/\beta\theta^2)$$

۳- روش به کارگیری خواص ویژه

روشی برای تولید اعداد تصادفی با توزیع های گوناگون است و در مواقعی از این روش استفاده میشود که با استفاده از خواص ویژه ای بتوان پیچیدگی راه حل را کاهش داد. مثالهایی از آن عبارت است از:

- یک نمونه نرمال لگاریتمی محاسبه شده از e^y جایی که y نمونه ای با توزیع نرمال است.
- یک نمونه ارلنگ به عنوان جمع نمونه های نمایی
- یک نمونه بتا به عنوان نرخ نمونه های گاما
- یک نمونه دوجمله ای به عنوان جمع رشته برنولی
- یک نمونه نرمال به عنوان جمع نمونه های یکنواخت
- یک نمونه کای دو (chi^2) اگر درجه آزادی زوج باشد از یک نمونه ارلنگ به دست می آید.
- یک نمونه توزیع F ، نرخ دو نمونه کای دو (chi^2) است.

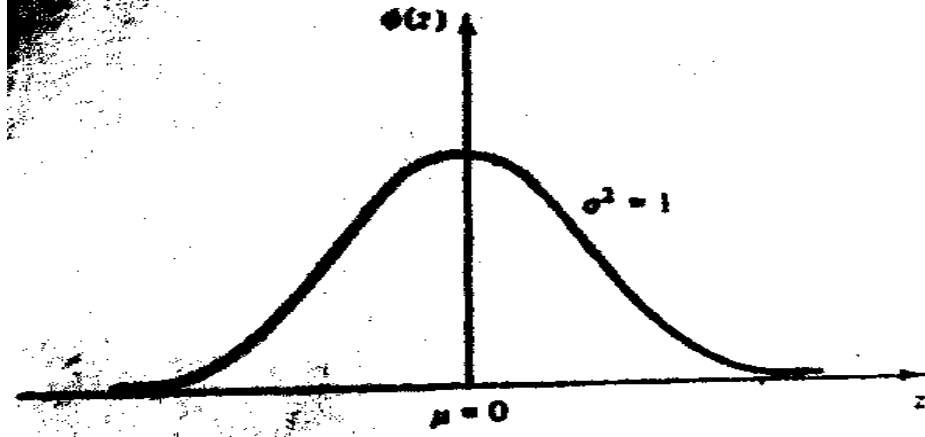
در این روش به جای استفاده از تبدیل معکوس از خواص ویژه های استفاده میکنیم که در ادامه در قالب چند مثال به آنها میپردازیم.

مثال) توزیع نرمال تابع مولد تصادفی توزیع نرمال را بیابید. تابع چگالی احتمال آن برابر است با:

$$24 \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < \infty$$

با فرض $N(0,1)$ توزیع نرمال استاندارد به دست می آید:

$$f(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} \quad \sigma = 1, \mu = 0$$



شکل ۵-۴) نرمال استاندارد

تابع چگالی احتمال را به دست می آوریم.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

تبدیل باکس-مولر

$$\Longrightarrow S = (-2 \ln U_1) \frac{1}{2} \cos(2\pi U_2)$$

با فرض S به شکل بالا، هر نمونه تصادفی X با توزیع نرمال با مقدار مشخص μ و δ میتوان یافت.

اگر U_1 و U_2 دو عدد تصادفی یکنواخت در $[0, 1]$ باشند، معادله توزیع نرمال با پارامترهای μ و δ برابر خواهد بود:

$$X_i = \delta \cdot S + \mu$$

راه حل)

گام ۱) تولید تصادفی های یکنواخت U_{i1} و U_{i2}

گام ۲) یافتن تبدیل S

گام ۳) تولید تصادفی X_i با توزیع نرمال

برای یافتن S و برای افزایش دقت عملیات میتوان روش دیگری را به کار برد. یکی از خاصیت های ویژه توزیع نرمال خاصیت

حد مرکزی است. در صورتی که $x_1, x_2, \dots, x_n$ اعداد تصادفی یکنواخت باشند، آنگاه $X = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ دارای

توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس δ خواهد بود. اگر $x_1, x_2, \dots, x_n$ متغیرهای تصادفی در فاصله $u_1, u_2, \dots, u_n$ باشند، میانگین آنها در فاصله $[0, 1]$ داریم $\mu = \frac{1}{2}$ و در فواصل بالا هم $\delta^2 = \frac{1}{12}$ است. پس S میشود:

$$S = \frac{\sum_{i=1}^n U_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

میتوان به μ و $\square$ مقدار مشخصی داد. مثلاً خیلی راحت میتوانیم به جای n مقدار ۱۲ بگذاریم، فرض کنیم $\mu = \frac{1}{2}$ و $\delta^2 = \frac{1}{12}$ ، در این صورت داریم:

$$S = \sum_{i=1}^{12} U_i - 6$$

پس با انتخاب ۱۲ عدد تصادفی، S مورد نظر را می یابیم و در فرمول $X_i = \delta \cdot S + \mu$ قرار می دهیم.

مثال) توزیع برنولی برای تابع توزیع برنولی مولد تصادفی بیابید.

متغیرهای تصادفی گسسته X تنها مقدار ۰ یا ۱ میگیرند که احتمال هریک به صورت زیر است:

$$P(x = 0) = P(U \leq P) = P \quad \text{احتمال پیروزی:}$$

$$P(x = 1) = P(U > P) = 1 - P = q \quad \text{احتمال شکست:}$$

که در آن داریم $p+q=1$ و U متغیر تصادفی یکنواخت است. متغیر تصادفی نهایی تابع توزیع برنولی برابر میشود با:

$$X_i = \begin{cases} 1 & U_i > p \\ 0 & U_i \leq p \end{cases}$$

مثال) اگر فرض کنیم که تصادفی های مورد نیاز دارای سیستمی با توزیع برنولی با پارامتر $p=0.6$ باشد آنگاه داریم:

$$X_i = \begin{cases} 1 & U_i > 0.6 \\ 0 & U_i \leq 0.6 \end{cases}$$

تصادفی یکنواخت U_i : 0.3 0.4 0.8 0.2 0.7

تصادفی با توزیع برنولی U_i : 0 0 1 0 1

مثال) توزیع دوجمله ای مولد تصادفی ای بیابید که از توزیع دوجمله ای پیروی کند.

تابع مولد گشتاور توزیع دوجمله ای $M(t)=(1-p+pt)^M$ است و تابع مولد گشتاور برنولی $M(t)=(1-p+pt)$ می باشد. بنابر

قضایای احتمال، اگر فرض کنیم که X یعنی تعداد موفقیت ها در n آزمایش باشد:

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

اگر اعداد تصادفی $x_1, x_2, \dots, x_n$ دارای توزیع برنولی باشند، لذا $X_i = \sum_{i=1}^n x_i$ آنگاه X_i دارای توزیع دوجمله ای است.

مثال) در توزیع برنولی رشته مثال قبل، داشتیم: ۰ و ۰ و ۱ و ۰ و ۱ پس $X_1 = \sum_{i=1}^5 x_i = 2$ یک دوجمله ای است.

مثال) توزیع گاما

اگر تابع چگالی احتمال توزیع گاما به صورت زیر باشد، مولد تصادفی آن را بیابید. تابع چگالی احتمال

آن به صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

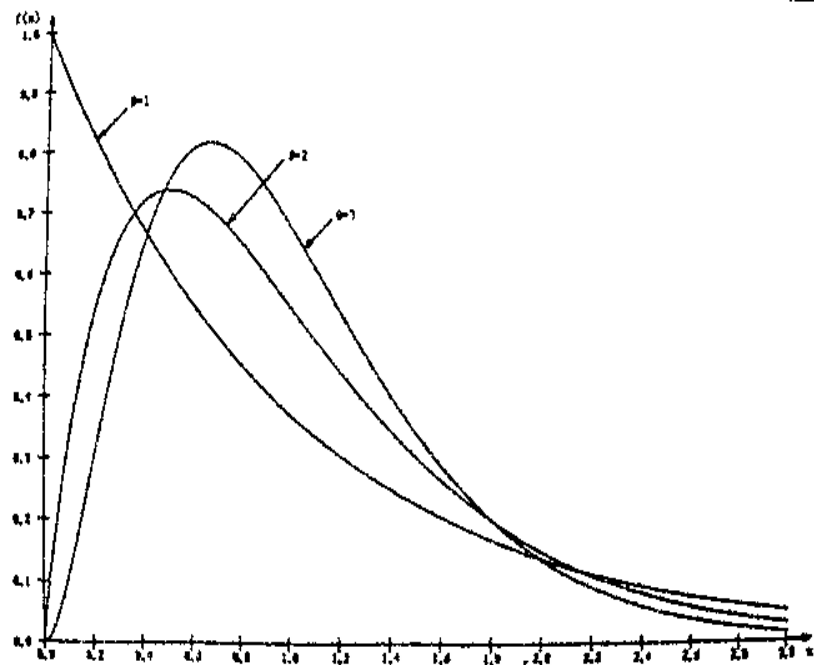
با پارامتر شکل α و پارامتر مقیاس β داریم:

$$\mu = \frac{\alpha}{\beta} \text{ و } \sigma^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

29 اگر $x_1, x_2, \dots, x_n$ دارای توزیع نمایی با میانگین β باشند، آنگاه: $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ دارای توزیع گاما با پارامترهای α و β می باشد.

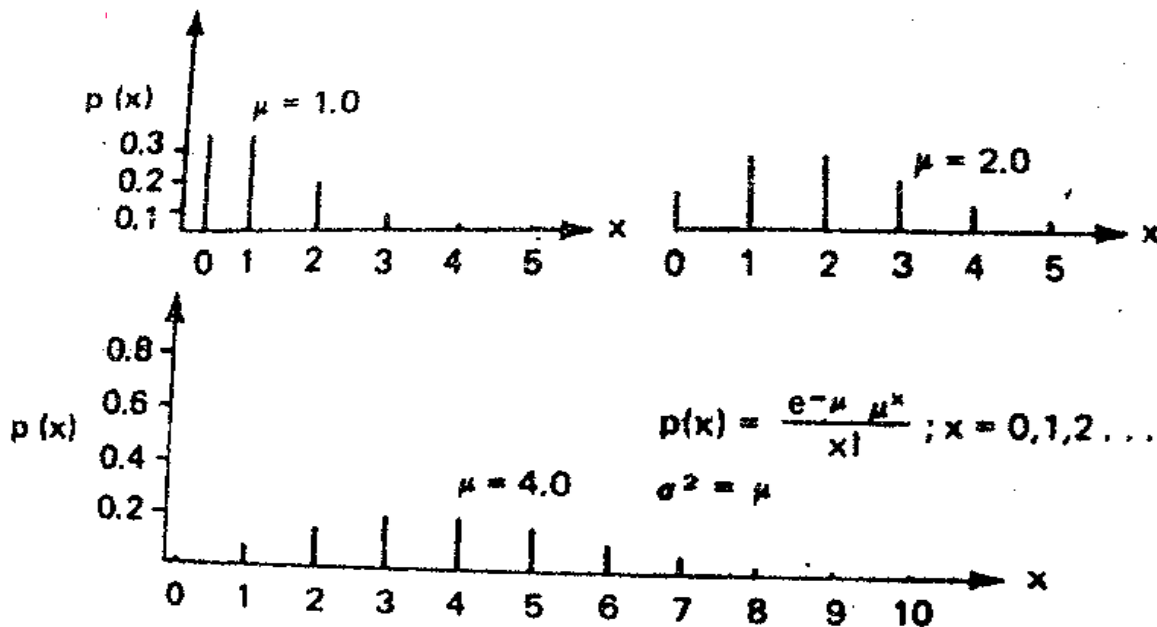
$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i \\ &= \sum_{i=1}^n -\beta \ln(U_i) = -\beta \ln(u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n) = -\beta \ln\left(\prod_{i=1}^n U_i\right) \end{aligned}$$

پس $X_i = -\beta \ln(\prod_{i=1}^n U_i)$ ، برای $i=1, 2, \dots, n$ ، U_i دارای توزیع نمایی با میانگین β است.



شکل ۵-۵) توزیع گاما

مولد تصادفی ای بیابید که از توزیع پواسن پیروی کند. (راهنمایی: صفحه ۱۲۷ و ۱۲۸ کتاب)



شکل ۵-۶) توزیع پواسن

نمونه سوال (روش حذفی و خواص ویژه):

(۱۷) با استفاده از روش حذفی برای توزیع پواسن با میانگین $\alpha = 0.2$ سه متغیر تصادفی تولید کنید.