

Monday, March 23, 2020
1:57 AM

فرم استاندارد جمع مinterm ها

هر تابعی را می توان به صورت مجموع مinterm ها نمایش داد. همانطور که می دانیم هر جمله مinterm شامل همه متغیرهای ورودی تابع است. پس در نوشتن تابع به صورت جمع مinterm ها، باید در هر جمله متغیری که غایب است را ظاهر کرده و جمله را به دو ترمینال تقسیم.

مثلاً فرض کنید x در جمله ای غایب است مثلاً $x'z$ ، برای ظاهر کردن x در جمله $x'z$ یا xz در ضرب می کنیم برای درک بیشتر مثال زیر را ببینید:

$$\begin{aligned} \text{مسئله (1)} \quad F(x, y, z) &= xy + y'z = xy(z + z') + y'z(x + x') \\ &= xyz + xyz' + xy'z + x'y'z = m_7 + m_6 + m_5 + m_1 \\ &= \sum(1, 5, 6, 7) \end{aligned}$$

$$\text{مسئله (2)} \quad F(A, B, C) = A + B'C$$

$$B \Rightarrow A(B + B') + B'C(A + A')$$

$$F = AB + AB' + AB'C + A'B'C$$

$$\begin{aligned} \text{در جمله اول } (B + B') \text{ غایب است} \quad & AB(C + C') + AB'(C + C') + AB'C + A'B'C \\ &= ABC + ABC' + AB'C + AB'C' + AB'C + A'B'C \end{aligned}$$

$$= m_7 + m_6 + m_5 + m_4 + m_5 + m_1$$

$$F = \sum(1, 4, 5, 6, 7)$$

نکته: علامت $\sum$ به معنای جمع است، معنوم OR می باشد. مinterm مورد نظر است.

مفهوم استاندارد ضرب ماستیم

همانطور که دیدیم همه جمله‌های توانی را می‌توان به صورت ماستیم هم نوشتن دارد. پس ما به وضعیت فعلی این بار می‌توانیم تابع را به صورت ضرب ماستیم هم بیان کنیم.

نکته: توجه کنید که وقتی یک تابع را به صورت جمع ماستیم‌هاش بیان می‌کنیم، واقعاً ماستیم‌هایی که تابع در آن‌ها مقدار 1 دارد را مشخص می‌کنیم. و وقتی که تابع را به صورت ضرب ماستیم‌ها بیان می‌کنیم، در واقع می‌بینیم که تابع در آن‌ها مقدار 0 دارد را مشخص می‌کند.

نکته: برای تبدیل یک تابع به فرم استاندارد ضرب ماستیم‌ها، در هر جمله‌ای متغیری صف‌شده است، آن جمله را با متغیر صف‌شده x متمم‌اش جمع می‌کنیم. مثلاً $(y' + z)$ ، x ندارد پس با xx' آن را جمع می‌کنیم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال: $F(x, y, z) = (x' + y) \cdot (y')$

$$= (x' + y + z z') \cdot (y' + x x' + z z')$$

$$= (x' + y + z)(x' + y + z')(x + y' + z)(x + y' + z')$$

$$\cdot (x' + y' + z) \cdot (x' + y' + z')$$

$$= M_4 \cdot M_5 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_6 \cdot M_7$$

$$= \Pi(2, 3, 4, 5, 6, 7)$$

نکته: همانطور که می‌بینید همه متغیرهای x را با 1 در آورده‌ایم. در نظر می‌گیریم (هنگام نوشتن شماره ماستیم)

Yasha

مسئله) $F = A + B'C$

به صورت ضرب ماکسیم:

$$\begin{aligned} F &= (A+B') \cdot (A+C) \\ &= (A+B'+CC') \cdot (A+BB'+C) \\ &= (A+B'+C) \cdot (A+B'+C') \cdot (A+B+C) \cdot (A+B'+C) \\ &= M_2 \cdot M_3 \cdot M_0 \cdot M_2 = \Pi(0, 2, 3) \end{aligned}$$

تبدیل فرم‌های متعارف به همگن:

همان تابعی که به صورت جمع مینویسیم حاصل آن شده می‌شود مجموع مینویسیم هائی در تابع اصلی وجود ندارد به عنوان مثال اگر

$$F = \Sigma(1, 4, 5, 6, 7)$$

$$\Rightarrow F' = \Sigma(0, 2, 3) = m_0 + m_2 + m_3$$

مثال اگر مینویسیم تابع F را حساب کنیم، خواص داشت:

$$F' = (m_0 + m_2 + m_3)' = M_0 \cdot M_2 \cdot M_3 \Rightarrow$$

$$F = \Pi(0, 2, 3)$$

پس می‌بینیم که ماکسیم هائی تابع F به دست آمدند. یعنی در مجموع می‌توانیم بنویسیم:

• جمع مقروض F را می‌توانیم به صورت مجموع مینویسیم هائی که تابع F در آن‌ها ۱ است بنویسیم. همچنین می‌توانیم به صورت ضرب ماکسیم هائی که تابع F در آن‌ها ۰ است بنویسیم.

subject:

Date: / /

مثال تابع $F = AB' + AB + AC$ را در نظر بگیرید. F و متمم آن را به فرم‌های استاندارد بنویسید.

A	B	C	F	F'
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

$$F = \sum (0, 1, 5, 6, 7)$$

$$F = \prod (2, 3, 4)$$

$$F' = \sum (2, 3, 4)$$

$$F' = \prod (0, 1, 5, 6, 7)$$

فرم‌های استاندارد

فرم‌های متعارف که دیدیم دارای مینت‌ها و ماکس‌ت‌ها بود و می‌دانیم که هر مینت‌ها و ماکس‌ت‌ها حاوی تمام متغیرها (یا به صورت ساده یا متمم) هستند.

راه دیگری برای بیان تابع بول، فرم استاندارد است. در این فرم جمله‌های تشکیل دهنده تابع می‌توانند 1، دو یا هر تعداد متغیر داشته باشند.

دو فرم استاندارد وجود دارد: ¹ جمع حاصل ضرب‌ها و ² ضرب حاصل جمع‌ها.

جمع حاصل ضرب‌ها یک عبارت بولی است شامل جمله And نه با یکدیگر شده اند مثل

$$F_1 = y' + xy + x'y'z$$

ضرب حاصل جمع‌ها یک عبارت بولی است شامل جمله OR که با هم شده اند

$$F_2 = x(y' + z)(x' + y + z)$$

Yasha

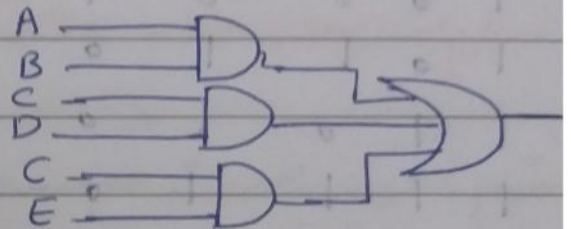
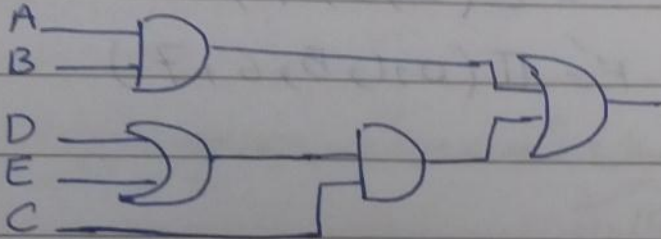
subject:

Date: / /

نکته: با فرض اینکه تمام ورودی‌ها مستقیماً موجودند و به کمک NOT سازی نیازی نباشد، این مدارهای استاندارد را می‌توان در یک پیاده سازی مدار و سطح نشان داد

تبدیل تابع بول به یک استاندارد غیر استاندارد هم بیان شود. مثلاً تابع F_1

$$F_1 = AB + C(D+E) \xrightarrow{\text{تبدیل به استاندارد}} F_1 = AB + CD + CE$$



حالت غیر استاندارد F_1

نکته: یک پیاده سازی (و سطح) بر صیغ داده می‌شود چون تاخیر کمتری خواهد داشت

فصل سوم : حداقل سازی در سطح نسبت

مقدمه:

حالا بگذاریم می دانیم یک مجموعه داده در منطقه یک تابع به یک عددی عبارت جبر آن را دارد. اگر چه جدول درستی یک تابع منحصر بفرد است، اما چون می توان از مقادیر

ساده سازی استفاده کرد، قدم های جبری متفاوتی برای می توان برابر یک تابع

کرد. به هر چه این نرم های جبر ساده تر باشد، هزینه ساده سازی منطقی آن

کمتر است. در این فصل سعی داریم یک روش جدول و قانونی را برای ساده

یک تابع بیان کنیم. روش مورد مطالعه این فصل نقش کارنو نام دارد.

نقشه کارنو:

نقشه کارنو، در واقع راه دیگری برای بیان و نمایش جدول درستی است

تمام حالات ممکن برای ترکیب متغیرها با هم را نشان می دهد و با

از آن می توان تابع ساده سازی نمود.

subject:

Date: / /

نقشه دومنفره: دومنفره با هم ۲ حالت دارند و بی مستقیم را تولید می کنند.

نمای این نقشه کارنو ۲ منفره ۲ مربع خواهد داشت.

$x \backslash y$	0	1
0	$x'y'$	$x'y$
1	xy'	xy

$x \backslash y$	0	1
0	m_0	m_1
1	m_2	m_3

x	y	جمله	جمله‌نادر
0	0	$x'y'$	m_0
0	1	$x'y$	m_1
1	0	xy'	m_2
1	1	xy	m_3

نکته: در نقشه کارنو هر خانه با هم ۱ یا ۰ فقط یک متغیر اختلاف دارد. این ویژگی برای ساده سازی تابع استفاده می شود.

مثلاً m_1 و m_3 در دومنفره: $x'y + xy = y(x' + x) = y$

نقشه سه منفره ۱

سه منفره با هم ۸ حالت را ایجاد می کنند. پس نقشه کارنو آنرا هم ۸ خانه

خواهد داشت. نکته ها را بخوانیم و در نقشه کارنو هر خانه با هم ۱ یا ۰

فقط یک متغیر اختلاف دارد. به همین دلیل ترتیب خانه ها در آن کمی متفاوت

از جدول درستی است: نقشه ۳ منفره در وقت نیست.

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	$x'y'z'$	$x'y'z$	$x'yz$	$x'yz'$
1	$xy'z'$	$xy'z$	xyz	xyz'

Yasha ۱=۱

subject:

Date: / /

به هم زدن ترتیب نسبت به جدول داتی به خاطر این است که هنگام عبور از یک

مقوله به مقوله تغییر فقط یک بیت از نظر مقدار تغییر کند و همسانی حفظ شود.

$$F(x, y, z) = \sum(2, 3, 4, 5)$$

$$F = x'y + xy'$$

	yz	00	01	11	10
x	0			1	1
1		1	1		

مسئله

$$F(x, y, z) = \sum(0, 2, 3, 4)$$

$$F = y'z' + x'y$$

	yz	00	01	11	10
x	0	1		1	1
1		1			

نکته: در نقشه های کربن اگر به متغیر متون اول، آخر یعنی کجای صواب و ران

هم، با هم هم به اند چون فقط در مقدار یک متغیر با هم اختلاف دارند. مثلا

$$m_2 = x'y'z' + x'yz' = x'z'(y' + y) = x'z'$$

$$m_6 = xy'z' + xyz' = xz'(y + y') = xz'$$

$$F(x, y, z) = \sum(3, 4, 6, 7)$$

$$F = xz' + yz$$

	yz	00	01	11	10
x	0			1	
1		1	1	1	1

مسئله

نکته ۱: این بار به ۲ خانه مجاور در نقشه طریق وقت رسید. این ترکیب نشان دهنده جمع منطقی ۲ مینترم مجاور است و نتیجه این ترکیب، تولید عبارتی با ۱ بیت است.

نکته ۲: مثلاً جمع منطقی چهار مینترم ۵ و ۲ و ۴ و ۶ عبارت صحیح را حاصل می‌دهد.

$$m_0 + m_2 + m_4 + m_6 = x'y'z' + x'y'z + x'yz' + x'yz = x'z'(y+y') + xz'(y+y') = z'(x+x') = z'$$

نکته ۳: تعداد مربعیات مجاور که می‌توانند با هم ترکیب شوند، همواره توانی ۲ است.

یعنی ۲، ۴، ۸ و ... و هر چه تعداد بیشتر این مربعیات با هم ترکیب شوند، حاصل ضرب ۲ است. تعداد کمتر مینترم نخواهد داشت (ساده تر خواهد بود).

مثال های بیشتر

نکته چهارم متغیر

با ۴ متغیر می‌توان داشت. نقشه طریق ۱۶ مینترم به شکل زیر

yz \ wx		yz				yz \ wx		yz				خواهد بود
		00	01	11	10			00	01	11	10	
wx	00	w'x'y'z'	w'x'y'z	w'x'yz	w'xyz'	00	m ₀	m ₁	m ₃	m ₂		
	01	w'xy'z'	w'xyz'	w'xyz	w'xyz	01	m ₄	m ₅	m ₇	m ₆		
wx	11	wxy'z'	wxyz'	wxyz	wxyz	11	m ₁₂	m ₁₃	m ₁₅	m ₁₄		
	10	wxy'z	wxyz	wx'yz	wx'yz'	10	m ₈	m ₉	m ₁₁	m ₁₀		

متغیر متعلق به هر خانه اند ترکیب سطرها و ستون مربوط به آن بدست می آید.

محصول بین هر خانه با خانه مجاور خود تفاوت متغیر اختلاف هست. مثلاً وقتی از

سطر دوم (11) و ستون دوم (01) با هم ترکیب شوند، عدد دودویی (1101) حاصل

می شود که معادل 13 دهدهی است. بنابراین مربع سطرها و ستون دوم می باشد.

خواهد بود.

از کردن نقشه کارنو 2 متغیره، متغیر متغیر 3 متغیره است. مربعات مجاور،

مربعات هستند که می توانند به یکباره لیست می شوند و این با هم اولیه ها را

با این هم با هم محاسبه می کنند.

مثال: $(A, B, C, D) = \sum (0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14)$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1	1		1
11	1	1		1
10	1	1		

$$F = C' + A'B' + BD'$$

مثال‌های بیشتر:

تکمله: یک نقطه چهار صفتیه:

• یک مربع یک مستطیل را نشان می‌دهد و علامه ۴ صفتیه است.

• دو مربع هموار، یک جمله ۳ صفتیه تولید می‌کنند.

• چهار مربع هموار، یک جمله ۲ صفتیه تولید می‌کنند.

• هشت مربع هموار، یک جمله یک صفتیه تولید می‌کنند.

• شانزده مربع هموار، جمله ۱ تولید می‌کنند.

• هیچ ترکیب دیگری از مربع‌ها نمی‌تواند تابع ساده باشد.

موجب‌های اصلی و اصلی‌ای

در هنگام انتخاب مربع‌های هموار، باید فقط شش نه حد اکثر مربعات قابل مجا

شدن و انتخاب شده باشد. همچنین تعداد حلات خروجی عبارت باید

حد اقل باید (حالات زائد و تکراری نوشته شود).

موجب اصلی: جمله حاصل‌گیری است که از ترکیب حد اکثر مربعات مجاور

Yasha

subject:

Date: / /

هم حاصل شده اند

موجب اصلی اساسی: اگر متغیر در یک عبارت مربع فقط یکبار موجب اصلی،

یونیش داده شود، به آن موجب اصلی، اساسی می گویند.

مثال: $F(A, B, C, D) = \sum (0, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15)$

CD	00	01	11	10
00	1		1	1
01		1	1	
11		1	1	
10	1	1	1	1

موجب های اصلی

$B'C$ و AD و AB' و CD

AB	00	01	11	10
00	1			1
01		1	1	
11		1	1	
10	1	1	1	1

موجب اصلی اساسی

$B'D'$ و BD

برای ساده سازی تابع، ابتدا موجب های اصلی اساسی را پیدا می کنیم سپس ساده سازی می کنیم.

مثلاً برای تابع بالا هم ساده سازی های

$$F = BD + B'D' + AD + CD$$

$$= BD + B'D' + CD + AB'$$

$$= BD + B'D' + B'C + AD$$

$$= BD + B'D' + B'C + AB'$$

Yasha

نقشه سطح متغیره

استفاده از نقشه های به پیش از ۵ متغیره دارند، چندان ساده نیست.

نقشه ۵ متغیره به 32 مربع وقت به 6 متغیره به 64 مربع نیاز دارد. وقتی تعداد

متغیرها زیاد شود، تعداد مربعات به طور نمایی افزایش می یابد. و سیکل کردن مربعات

همواره بسیار دشواری شود.

نقشه ۵ متغیره را با دو نقشه چهار متغیره هم می کنیم. به دو نقشه اول متغیر

و دوازدهم مقدار عنصر اول در نقشه دیگر مقدار 1 دارد. به صورت زیر:

<u>D</u>					<u>D</u>						
DE						DE					
BC		00	01	11	10	BC		00	01	11	10
00		m_0	m_1	m_3	m_2	00		m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}
01		m_4	m_5	m_7	m_6	01		m_{20}	m_{21}	m_{23}	m_{22}
11		m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}	11		m_{28}	m_{29}	m_{31}	m_{30}
10		m_8	m_9	m_{11}	m_{10}	10		m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}

$A=0$

$A=1$

کتابین راه برای کسب همسانی ها در نقشه ۵ متغیره این است که نقشه

ها را روی هم تقویم کنیم. یعنی دو نقشه ستون به ستون و سطر به سطر همسان باشند.

Yasha

مثال گفته شود.

نکته: بطریقی می توان گفت 2^k مربع 2^k در فضای n متغیره نمایش داده شده

حلهای $n-k$ متغیر است یعنی

تعداد درجه آزادی		تعداد متغیرهای یک جمله در فضای n متغیره			
k	2^k	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
0	1	2	3	4	5
1	2	1	2	3	4
2	4	0	1	2	3
3	8		0	1	2
4	16			0	1
5	32				0

ماده سازی تابع با استفاده از متغیر تابع

همانطور که می دانیم، می بینیم هاسی که در تابع F ظاهر نشده اند، بیایند متغیر تابع

F هستند. یعنی اگر در نقشه کارنو خانه های 0 را با هم ساده کنیم، متغیر ساده شده

تابع F به دست می آید. و از این طریق می توان تابع F را به دست آورد.

مثال: تابع بولی زیر را به صورت الف، جمع حاصل ضرب با حذف حاصل جمع ساده

$$F(A, B, C, D) = \sum (0, 1, 2, 5, 8, 9, 10)$$

Yasha

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	0	1

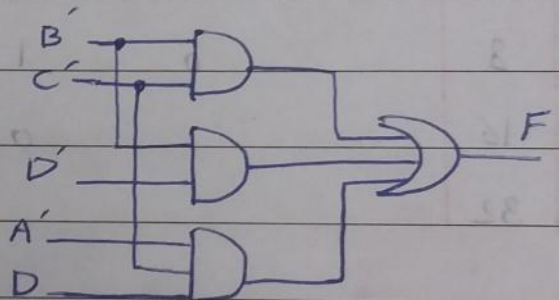
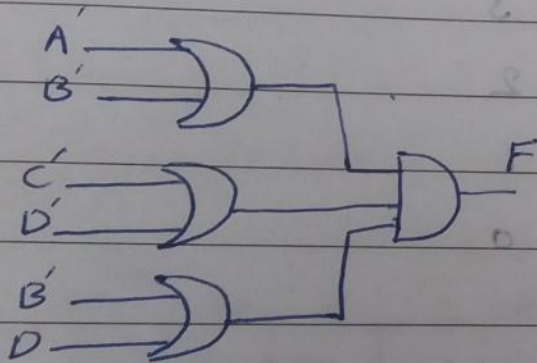
الف $F = B'C' + B'D' + A'C'$

با این مربعات حاوی 0 را ساده کنیم، ساده شده F' بدست می آید

$$F' = AB + CD + BD'$$

حال می توان F را از روی F' بدست آورد.

$$F = (A' + B') \cdot (C' + D') \cdot (B' + D)$$



حالات بی اهمیت:

در منطق می بینیم های تابع، شرایطی را که تابع در آنجا 1 است را مشخص

می کنند. تابع در آنجا بقیه می بینیم ها 0 است. طبعی اوقات کاربردهایی وجود

دارد که در آنجا به ابزار بعضی از می بینیم ها، تابع مشخص نیست. مثلاً می بینیم

در روی یک سینی به جای ارتفاع (دهه) استفاده می شود، دارای 9 تریس است

Yasha

نه بیاری است که استفاده نمی شود و در نتیجه نامشخص تصور می شوند. بنابراین نه

از برای بعضی از ترکیبات ورودی، خروجی نامعلوم دارند، تابع غیر کامل گفته می شود.

از حالات بی اهمیت می توان برای ساده سازی تابع استفاده کرد به طور کلی می توان

را حذف یا یک (نسبت به نیاز) در نظر گرفت.

$$F(A, B, C, D) = \sum (1, 3, 7, 11, 15)$$

مثال ۱

$$d(A, B, C, D) = \sum (0, 2, 5)$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	X	1	1	X
01		X	1	
11			1	
10			1	

$$F = CD + A'B'$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	X	1	1	X
01		X	1	
11			1	
10			1	

$$F = CD + A'D$$

به دو شکل می توان تابع را ساده کرد.

می توان همین تابع را با ساده سازی ۵ ها به عبارت ساده تر F شکل برد و آنرا

متمم گرفته و F' پیدا کرد به صورت ضرب حاصل جمع.

CD \ AB	00	01	11	10
00	X			X
01		X		
11				
10				

$$F' = AC' + D' \Rightarrow F = (A' + C) \cdot D$$

Yasha