رسم نمودار توابع مثلثاتی :

برای رسم نمودار توابع مثلثاتی و درک در مثلثات تسلط به جدول زیر لازم است :

π خوانده می‌شود پی [illegible]

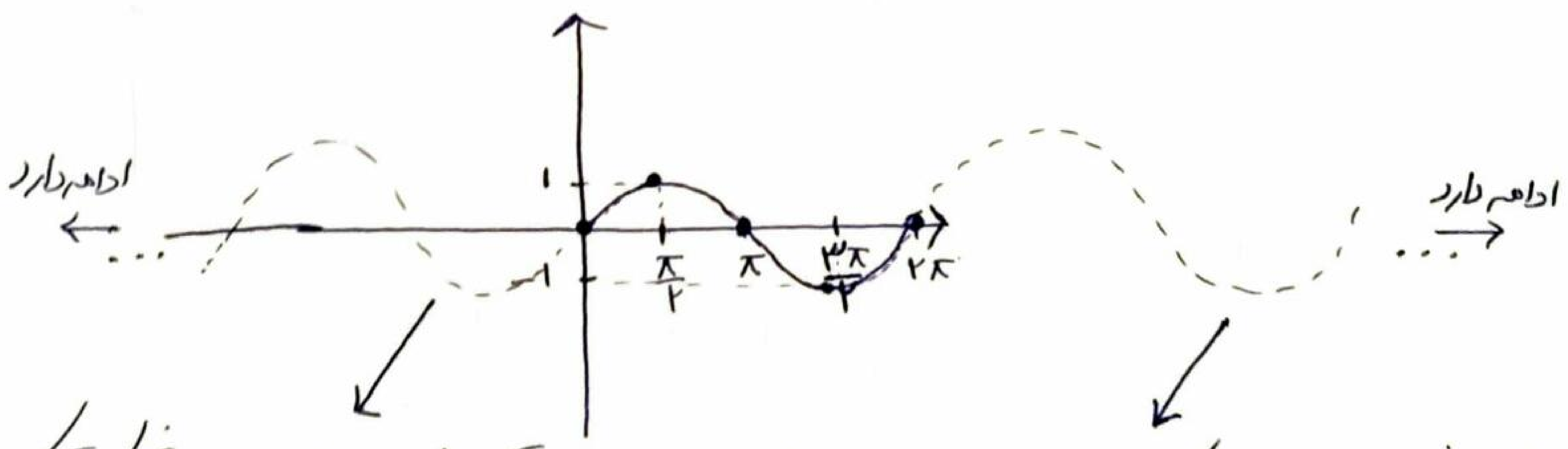
	0	30 ($\frac{\pi}{6}$)	45 ($\frac{\pi}{4}$)	60 ($\frac{\pi}{3}$)	90 ($\frac{\pi}{2}$)	180 (π)	270 ($\frac{3\pi}{2}$)	360 (2π)
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0
$\cot\theta$	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده

دقت شود می‌توان در جدول فوق به جای عبارت تعریف نشده ، ∞ (بی‌نهایت) را قرارداد.

مثال: نمودار تابع $y = \sin x$ را رسم کنید.

$y = \sin x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	1	0	-1	0

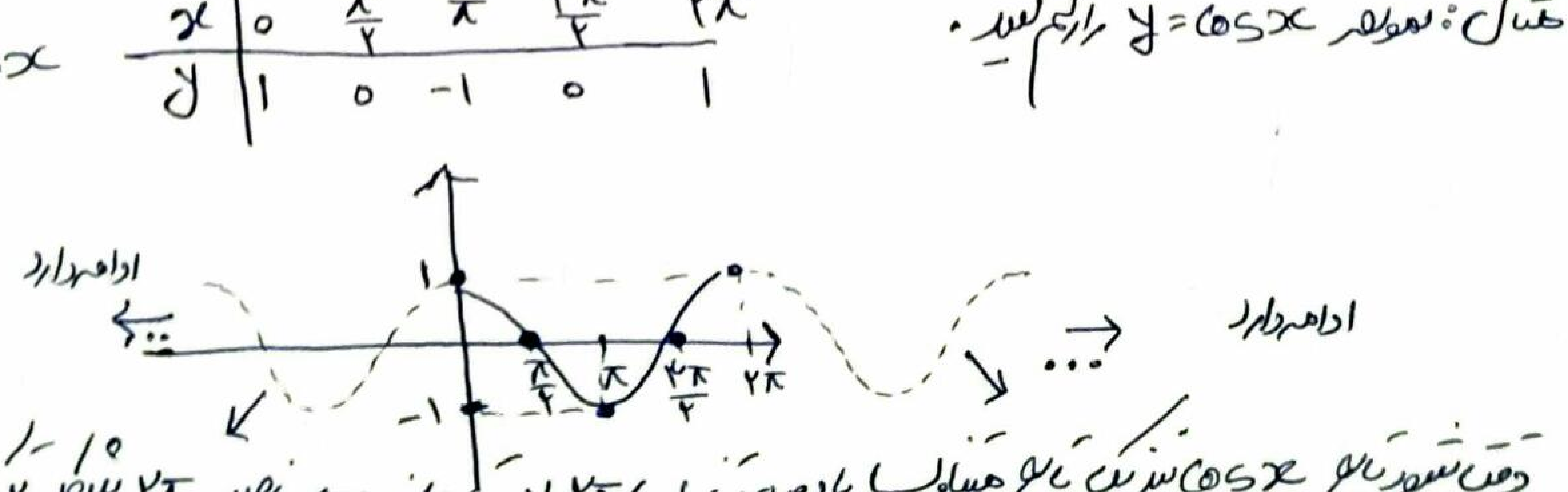


دقت شود تابع $\sin x$ یک تابع متناوب با دوره تناوب 2π است یعنی در هر فاصله 2π شکل تکرار می‌شود

مثال: نمودار $y = \cos x$ را رسم کنید.

$y = \cos x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	1	0	-1	0	1



دقت شود تابع $\cos x$ نیز یک تابع متناوب با دوره تناوب 2π است یعنی در هر فاصله 2π شکل تکرار می‌شود

مثال: نمودار $y = \tan x$ را رسم کنید.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

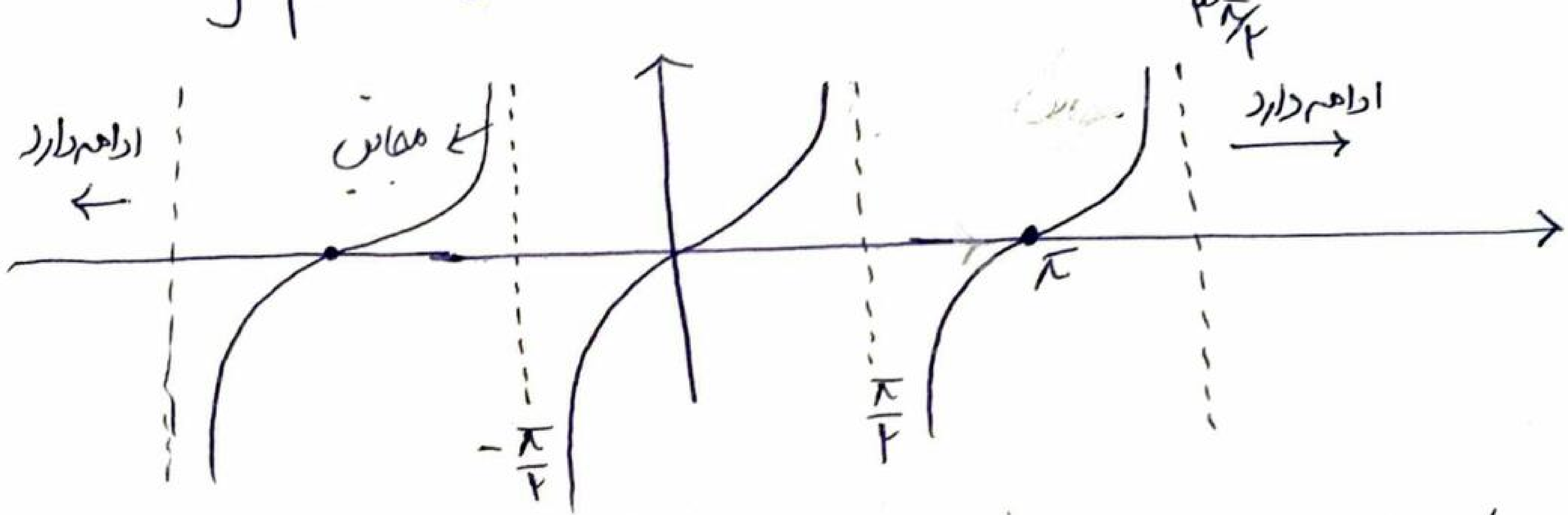
چون با یک عبارت کسری مواجه هستیم ابتدا مخرج را برابر صفر قرار می‌دهیم تا ریشه‌های آن حاصل شود

$$\cos x = 0 \xrightarrow[\text{مثلثات}]{\text{با توجه به جدول}} x = \pi/2 , 3\pi/2 , \dots \quad \text{و} \quad x = -\pi/2 , -3\pi/2 , \dots$$

پس در اینجا خطوط $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{3\pi}{2}$ در واقع مجانب شکل می‌باشند و مجانب خطی است که شکل در امتداد آن خط حرکت کرده اما هیچ وقت خط را قطع نمی‌کند.

$y = \tan x$

x	0	π
y	0	0



دقت شود که $\tan x$ نیز دارای دوره تناوب π است و شکل تکرار می‌شود

تمرین: با توجه به مثال فوق نمودار $y = \cot x$ را رسم کنید.

تابع جزء صحیح: $f(x) = [x]$ عبارت است از نزدیک‌ترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x.

تذکر: جزء صحیح مقدار x را به سمت عدد کوچکتر گرد می‌کند (به زبان ساده می‌توان گفت)

مثال: $[1.5] = 1$ $\quad [0.5] = 0$ $\quad [-1.2] = -2$ $\quad [-4.5] = -5$

$[2.75] = 2$ $\quad [-1.75] = -2$

مثال: نمودار تابع $y = [x]$ را در بازه $[-2, 2]$ رسم کنید.

حل: x را در بازه $[-2,2]$ قرار داده و y را محاسبه می‌کنیم به این طریق که:

$-2 \leq x < -1 \rightarrow y = [x] \Rightarrow y = -2$

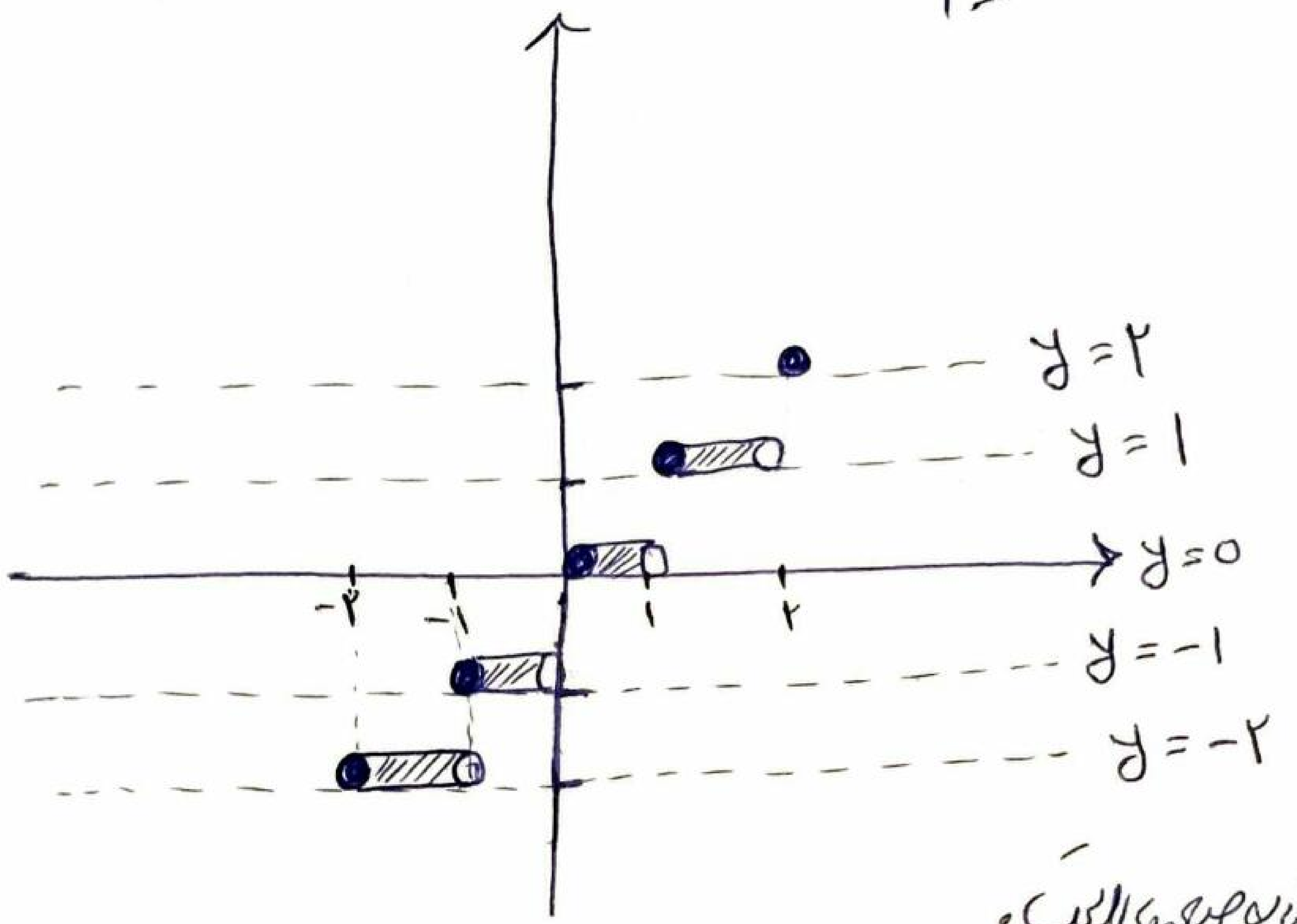
$-1 \leq x < 0 \rightarrow y = [x] \Rightarrow y = -1$

$0 \leq x < 1 \rightarrow y = [x] \Rightarrow y = 0$

$1 \leq x < 2 \rightarrow y = [x] \Rightarrow y = 1$

$x = 2 \rightarrow y = [x] \Rightarrow y = 2$

حال در صفحه مختصات خطوطی $y = k$ را رسم می‌کنیم و روی آن خطوط بازه x را مشخص کرده و قسمتی را که مساوی دارد توپر و قسمتی که مساوی ندارد توخالی می‌گذاریم.



تذکر: ۱- تابع جزء صحیح یک تابع صعودی است.

۲- $[x] \leq x < [x]+1$ و $x-1 < [x] \leq x$

۳- $[x]+[-x] = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases}$

تمرین: نمودار $y=[x]$ را در بازه $[-4,4]$ رسم کنید.

تمرین: مقادیر زیر را حساب کنید.

۱) $[2.5]$ ۲) $[45.2]$ ۳) $[-8.7]$ ۴) $[-11.75]$

تابع قدر مطلق x: $y=|x|$

$$|x| = \begin{cases} x & ; \ x \geq 0 \\ -x & ; \ x < 0 \end{cases}$$

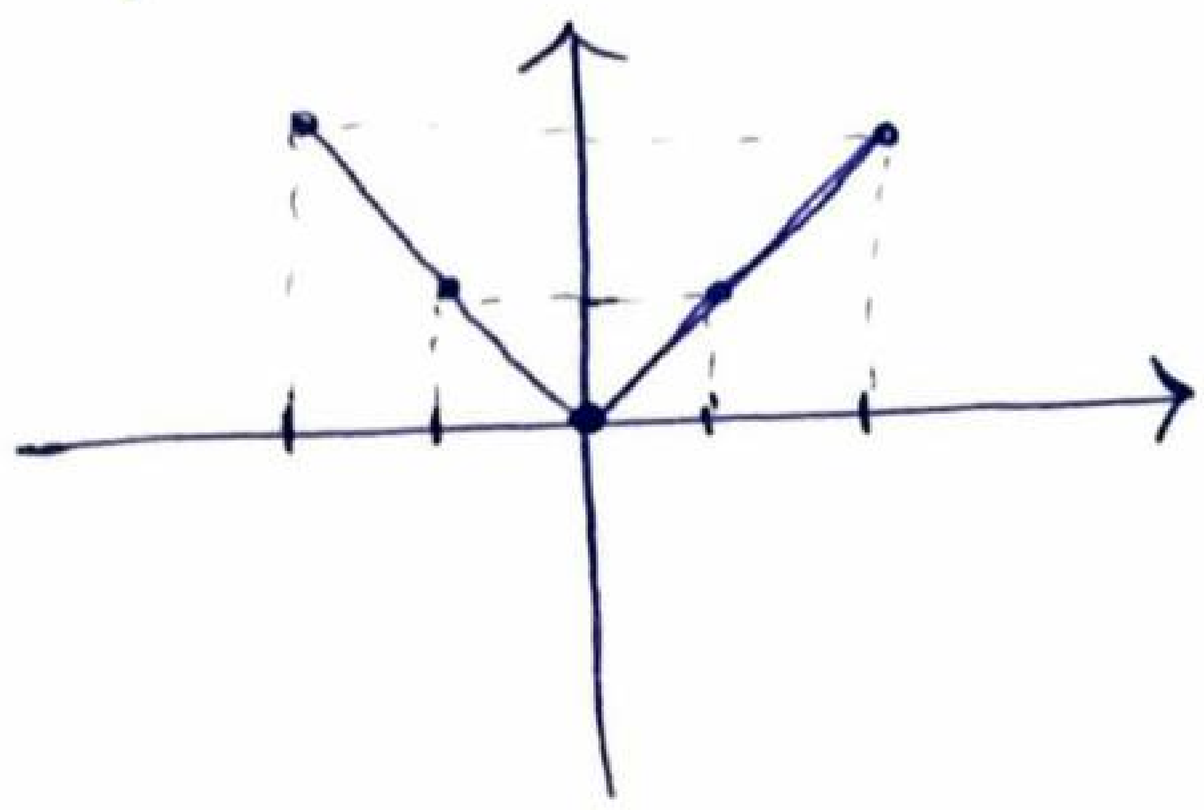
تذکر: خروجی تابع قدر مطلق فقط اعداد مثبت هستند یعنی:

$|1.5| = 1.5$ و $|-2| = 2$ و $|-7.5| = 7.5$

نمودار $y=|x|$:

$y=|x| \rightarrow$

x	0	1	-1	2	-2
y	0	1	1	2	2



تذکر: دو ویژگی مهم تابع قدر مطلق:

الف) $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$

ب) $|x| \geq a \iff \begin{cases} x \geq a \\ \text{یا} \\ x \leq -a \end{cases}$

مثال: نمودار تابع $y = |x-2|$ را رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار فوق به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$y = \begin{cases} x-2 & ; \ x \geq 2 \ (*) \\ -(x-2) & ; \ x < 2 \end{cases}$$

برای رسم نمودار تابع فوق ابتدا خط $y=x-2$ را برای $x \geq 2$ رسم می‌کنیم

$y = x-2$

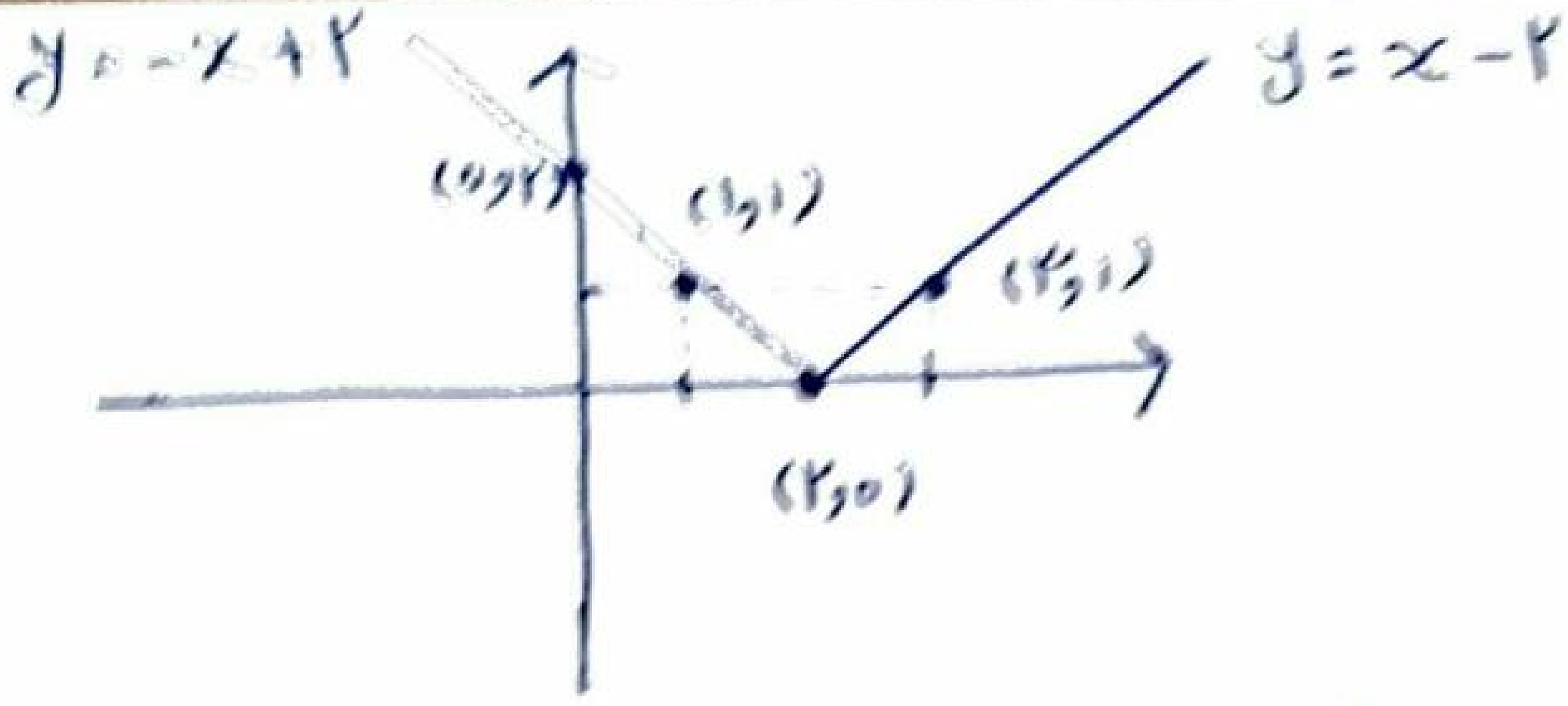
x	2	3
y	0	1

$\rightarrow$ دقت شود باید اعداد بزرگتر از 2 به معادله بدهیم چون (*)

حال خط $y = -(x-2)$ را رسم می‌کنیم با تأثیر دادن منفی در عبارت داریم $y = -x+2$

$y = -x+2$

x	0	1
y	2	1



مثال: $y=|x|+[x]$ را در فاصله $[-2,2]$ رسم کنید.

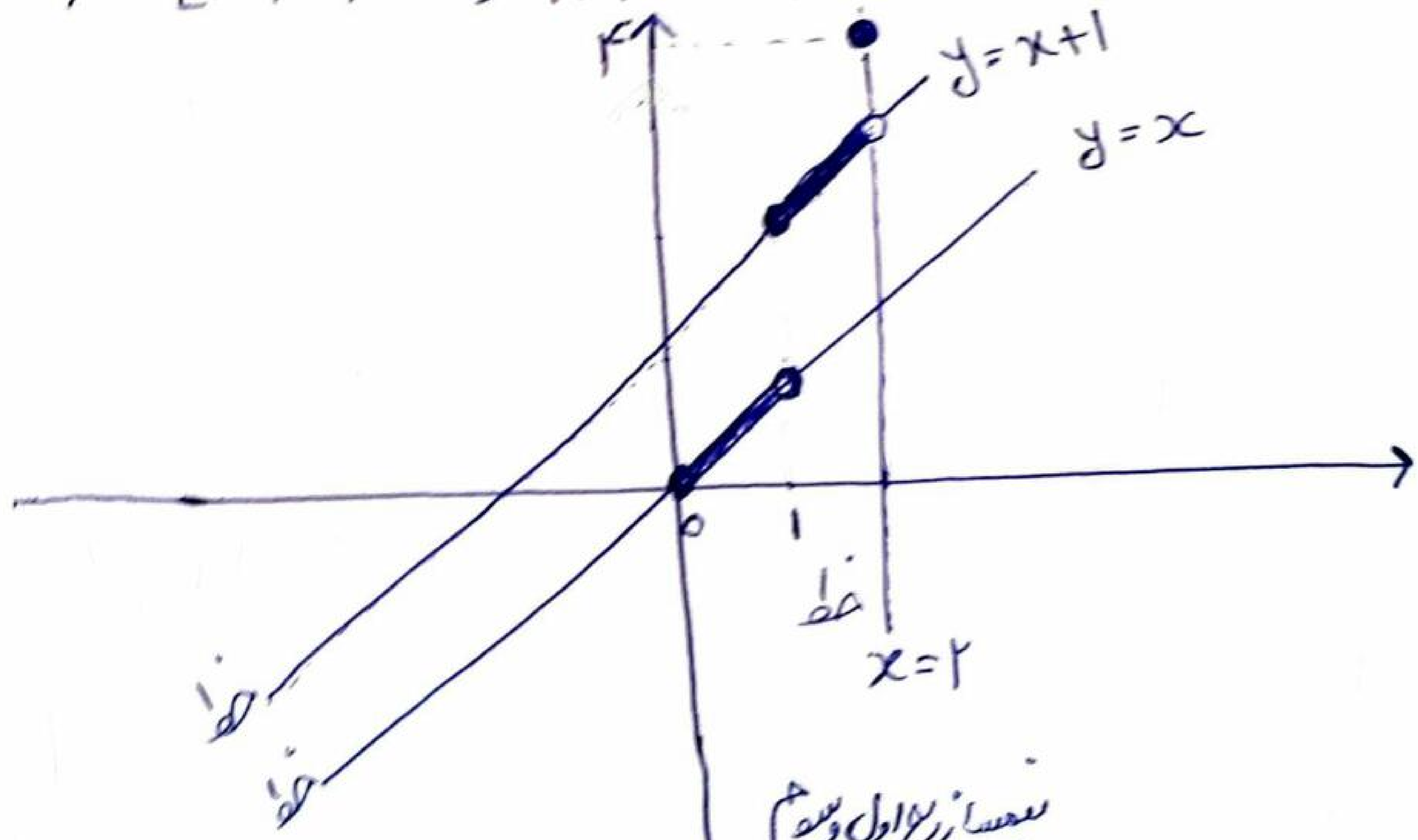
$-2\le x<-1 \Rightarrow [x]=-2$ چون x در فاصله منفی قرار دارد $|x|=-x \Rightarrow y=-x-2$

$-1\le x<0 \Rightarrow [x]=-1$ و " $|x|=-x \Rightarrow y=-x-1$

$0\le x<1 \Rightarrow [x]=0$ چون x در فاصله مثبت قرار دارد $|x|=x \Rightarrow y=x$

$1\le x<2 \Rightarrow [x]=1$ و " $|x|=x \Rightarrow y=x+1$

$x=2 \Rightarrow [x]=2$ و $|2|=2 \Rightarrow y=2+2=4$



نیمساز ربع اول و سوم

باید خط‌های $y=-x-2$ و $y=-x-1$ و $y=x$ و $y=x+1$ رسم شوند.

$y=x+1$

x	1
y	2

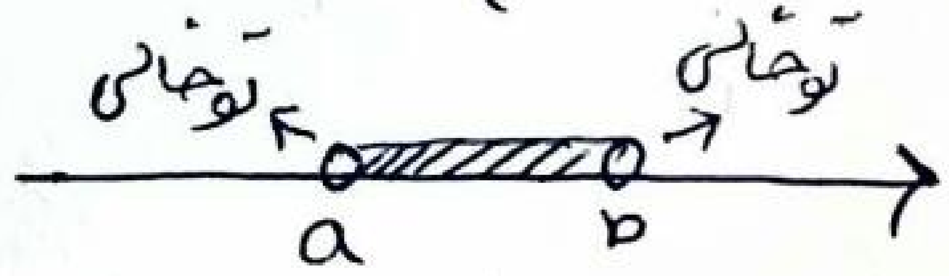
تمرین: با رسم خطوط $y=-x-2$ و $y=-x-1$ قسمت دوم شکل را کامل کنید.

فصل دوم : حد و پیوستگی توابع

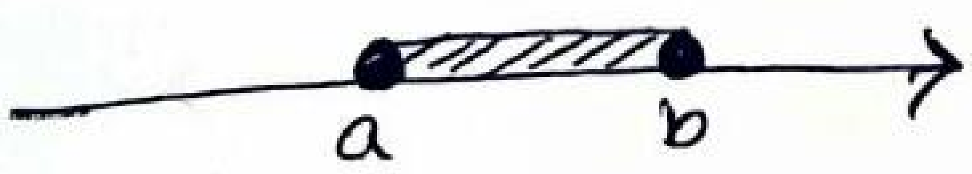
بازه‌ها حقیقی : بازه‌ها یا فاصله‌های حقیقی زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ می‌باشند که آنها را به دو دسته بازه‌های کراندار و بی‌کران تقسیم می‌کنیم.

بازه‌های کراندار :

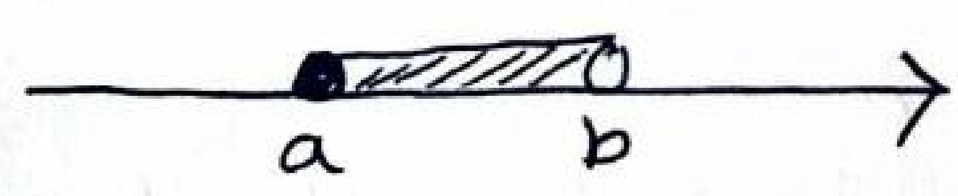
الف) بازه باز : اگر $a,b\in\mathbb{R}$ و $a\leq b$ ، مجموعه $\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$ را بازه باز یا فاصله باز دو عدد a و b می‌نامیم و با نماد (a,b) نمایش می‌دهیم ← شکل

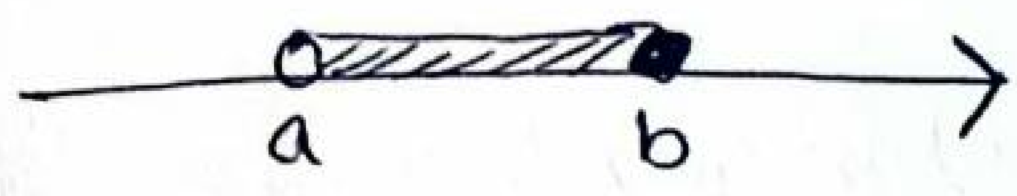


ب) بازه بسته : اگر $a,b\in\mathbb{R}$ و $a\leq b$ مجموعه $\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x\leq b\}$ را بازه بسته یا فاصله بسته دو عدد a و b می‌نامیم و با نماد $[a,b]$ نمایش می‌دهیم ← شکل



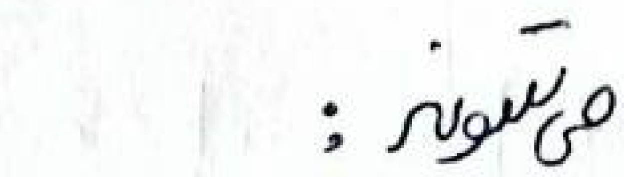
ج) بازه نیم باز : اگر $a,b\in\mathbb{R}$ و $a\leq b$ مجموعه‌های $[a,b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x<b\}$ و $(a,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\leq b\}$ را بازه‌های نیم باز می‌نامیم و داریم :

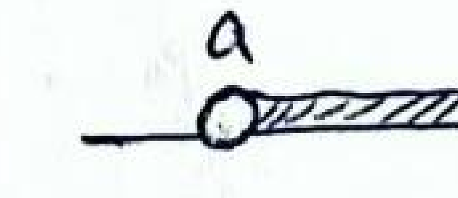
$[a,b)$: 

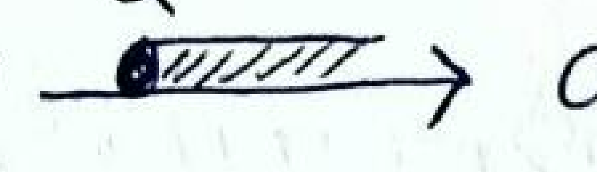
و $(a,b]$: 

بازه‌های بی‌کران :

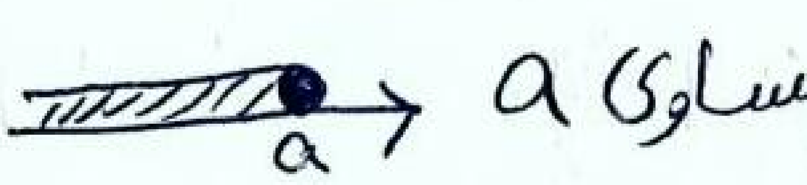
اگر $a\in\mathbb{R}$ باشد، بازه‌هایی به صورت زیر تعریف می‌شوند :

الف) مجموعه اعداد حقیقی بزرگتر از a : $(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R} \mid x>a\}$ 

ب) مجموعه اعداد حقیقی بزرگتر یا مساوی a : $[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq a\}$ 

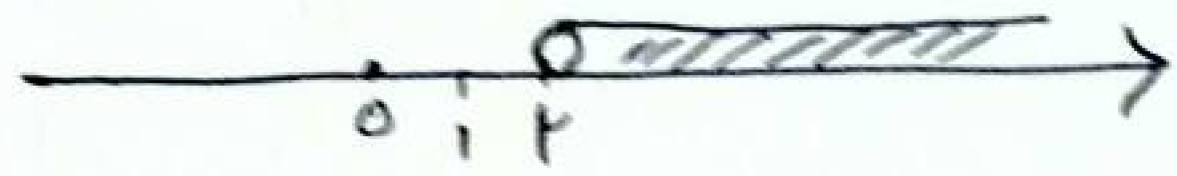
ج) مجموعه اعداد حقیقی کوچکتر از a : $(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R} \mid x<a\}$ 

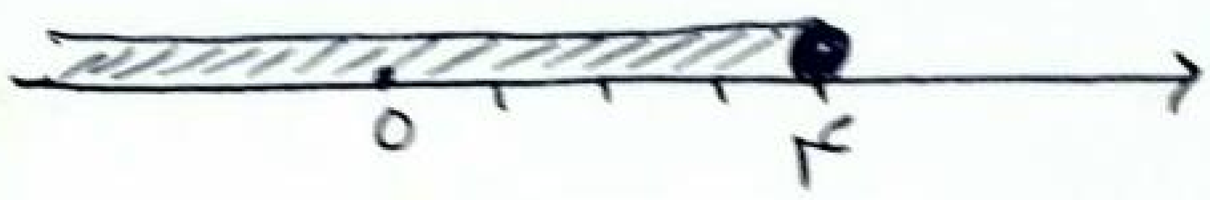
د) مجموعه اعداد حقیقی کوچکتر یا مساوی a : $(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq a\}$ 

هـ) مجموعه اعداد حقیقی : $(-\infty,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$ 

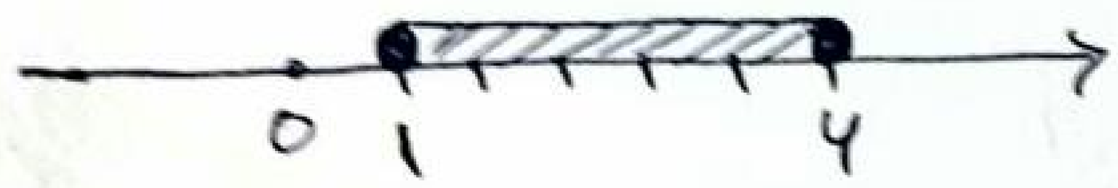
مثال: هر یک از مجموعه‌های زیر را به صورت بازه (فاصله) بنویسید.

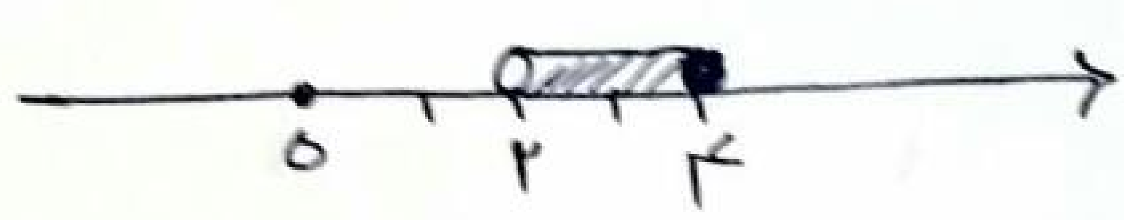
الف) $A=\{x \mid 2 \le x < 7\}$ حل:  $[2,7)$

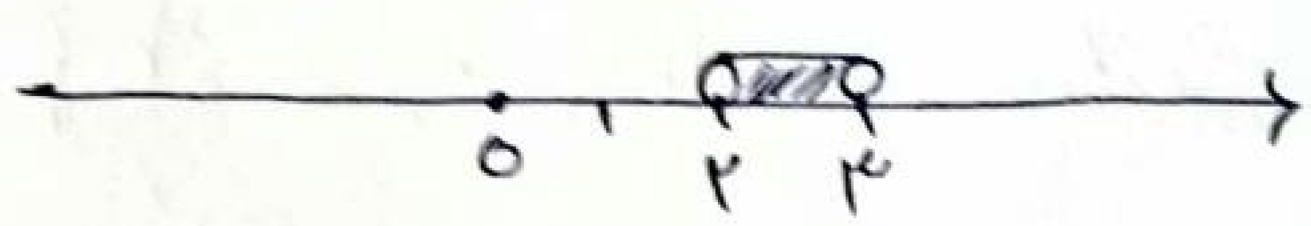
ب) $A=\{x \mid x > 2\}$ حل:  $(2,+\infty)$

ج) $A=\{x \mid x \le 4\}$ حل:  $(-\infty,4]$

مثال: هر یک از بازه‌های زیر را به صورت مجموعه بنویسید.

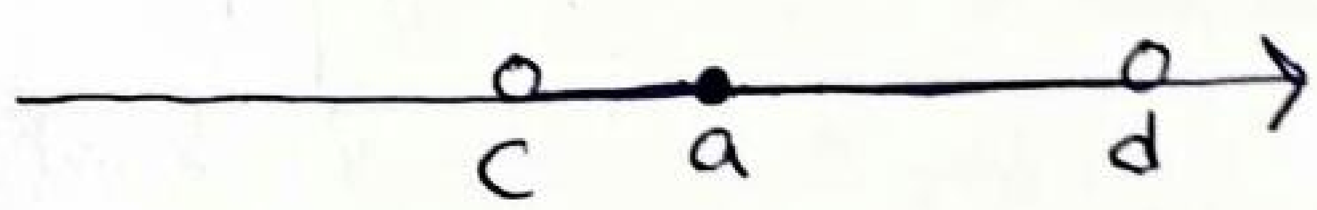
الف) $A=[1,6]$ حل: $A=\{x\in\mathbb{R} \mid 1 \le x \le 6\}$ 

ب) $A=(2,4]$ حل: $A=\{x\in\mathbb{R} \mid 2 < x \le 4\}$ 

ج) $A=(2,3)$ حل: $A=\{x\in\mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$ 

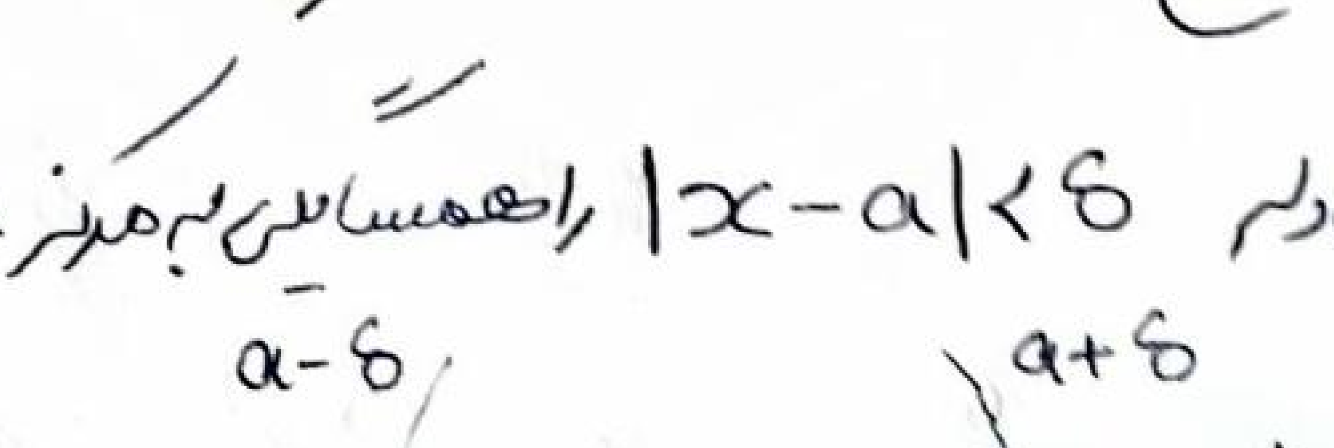
همسایگی:

الف) همسایگی باز عدد حقیقی a: عبارت است بازه بازی که شامل عدد a باشد یعنی بازه (c,d) را یک همسایگی a گوییم، اگر $a\in(c,d)$، مانند شکل زیر:



ب) همسایگی باز متقارن عدد حقیقی a: اگر a نقطه وسط بازه باشد، بازه متقارن است، بازه $(a-\delta,a+\delta)$ یک همسایگی متقارن a به شعاع δ است که $\delta>0$ است. (δ حرف یونانی دلتا)

نکته: مجموعه جواب‌های نامعادله $|x-a|<\delta$ را همسایگی به مرکز a و شعاع δ گویند.



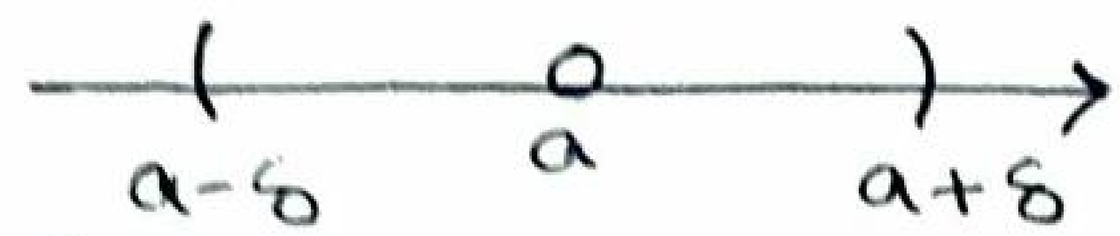
گزارش همسایگی را با نماد $N(a,\delta)$ نمایش می‌دهیم و داریم:

(*) از اینجا از ویژگی $|x|\le a \iff -a\le x\le a$ استفاده شده است.

$$N(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\} \overset{(*)}{=} \{x \mid -\delta < x-a < \delta\} \xrightarrow[\text{کن}]{\text{به طرفین } a \text{ اضافه}}$$

$$\{x \mid a-\delta < x-\cancel{a}+\cancel{a} < a+\delta\} \longrightarrow \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\} = (a-\delta, a+\delta)$$

تذکر: اگر عدد a را از همسایگی $N(a,\delta)$ حذف کنیم همسایگی را بدون مرکز a یا همسایگی محذوف متقارن a می نامند یعنی



مثال: مجموعه $A=\{x\in\mathbb{R} \mid |2x+1|<5\}$ یک همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع δ است، a و δ را بیابید.

حل: $|2x+1|<5 \Rightarrow -5<2x+1<5 \xrightarrow[\text{منفی یک}]{\text{به طرفین اضافه کن}} -5-1<2x+1-1<5-1$

$\Rightarrow -6<2x<4 \xrightarrow[\text{طرفین را بر ۲ تقسیم کن}]{\text{حال برای از بین بردن ضریب ۲}} -\frac{6}{2}<\frac{2x}{2}<\frac{4}{2} \Rightarrow \boxed{-3<x<2}$ (1)

از طرفی: $|x-a|<\delta \Rightarrow -\delta<x-a<\delta \Rightarrow \boxed{-\delta+a<x<a+\delta}$ (2)

با توجه به رابطه (2) و (1) از تساوی قرار دادن طرفین این رابطه داریم:

$$\begin{cases} -\delta+a=-3 \\ \delta+a=2 \end{cases}$$
$$2a=-1 \Rightarrow \boxed{a=-\frac{1}{2}}$$

در ادامه $a=-\frac{1}{2}$ را در رابطه (معادله) اول جایگذاری می کنیم تا مقدار δ حاصل شود

$$-\delta-\frac{1}{2}=-3 \longrightarrow -\delta=-\frac{3}{1}+\frac{1}{2} \Rightarrow -\delta=\frac{-3\times2+1}{2}=\frac{-6+1}{2}=-\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \cancel{-}\delta=\cancel{-}\frac{5}{2} \Rightarrow \boxed{\delta=\frac{5}{2}}$$

مثال: مجموعه $A=\{x\in\mathbb{R} \mid |2x+3|<1\}$ یک همسایگی متقارن a به شعاع δ است، a و δ را تعیین کنید.

حل: $|2x+3|<1 \longrightarrow -1<2x+3<1 \xrightarrow{\text{به طرفین منفی ۳ اضافه کن}}$

$-1-3<2x+3-3<1-3 \longrightarrow -4<2x<-2 \xrightarrow{\text{طرفین را بر ۲ تقسیم کن}} -\frac{4}{2}<\frac{2x}{2}<-\frac{2}{2}$

$\longrightarrow \boxed{-2<x<-1}$

$|x-a|<\delta \rightarrow -\delta<x-a<\delta \rightarrow a-\delta<x<a+\delta$

حال در ادامه با توجه به
مانند مثال قبل داریم :

$$\begin{cases} a-\delta=-2 \\ a+\delta=-1 \end{cases}$$
$$2a=-3 \Rightarrow \boxed{a=-\frac{3}{2}}$$

حال با جایگذاری مقدار $a=-\frac{3}{2}$ در معادله اول داریم :

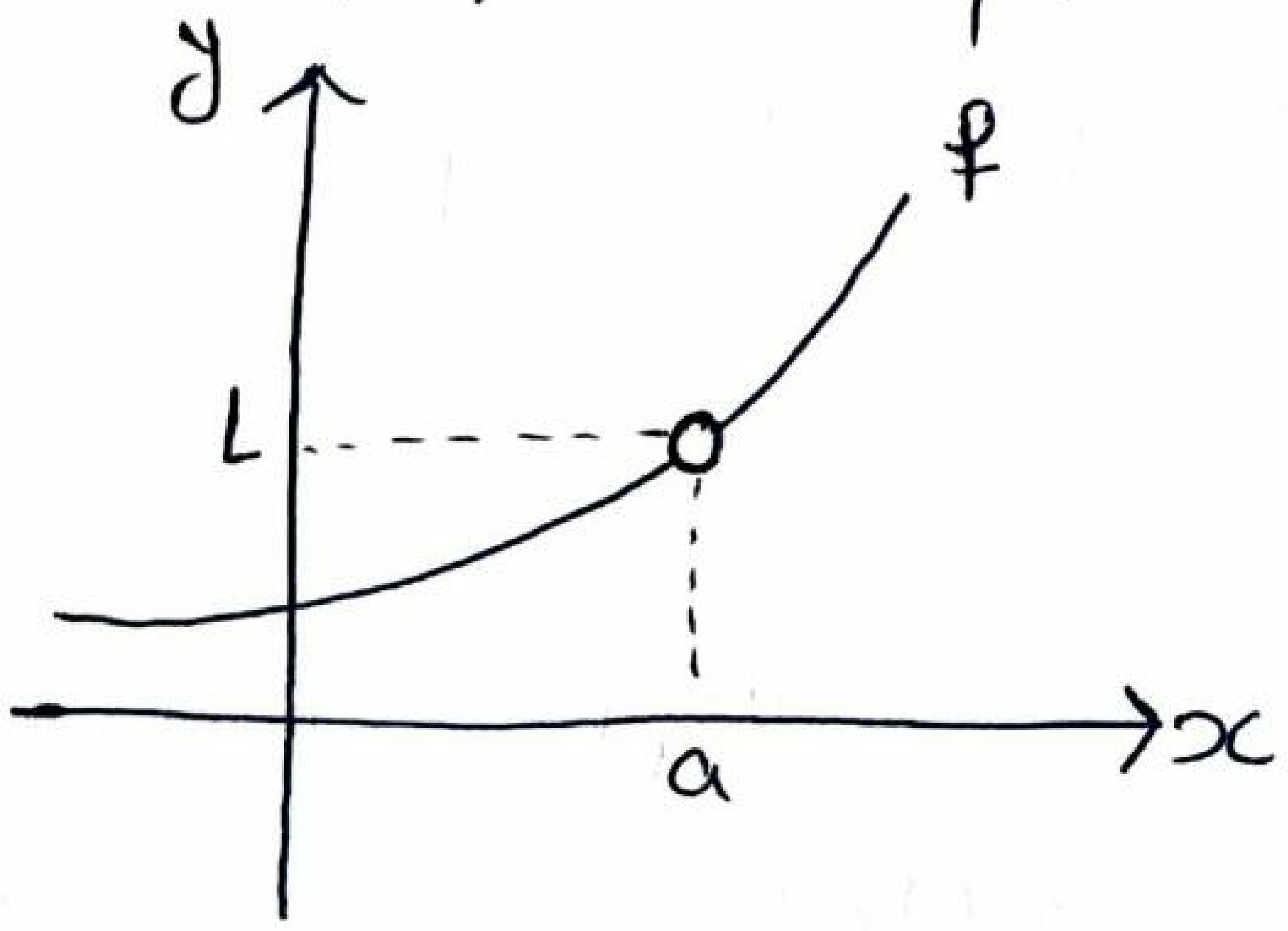
$$-\frac{3}{2}-\delta=-2 \Rightarrow -\delta=-\frac{2}{1}+\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{-2\times 2+3}{2}=\frac{-4+3}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\delta=-\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\delta=\frac{1}{2}}$$

تمرین: مجموعه $A=\{x\in\mathbb{R} \mid |2x+3|<6\}$ یک همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع δ است. a و δ را تعیین کنید.

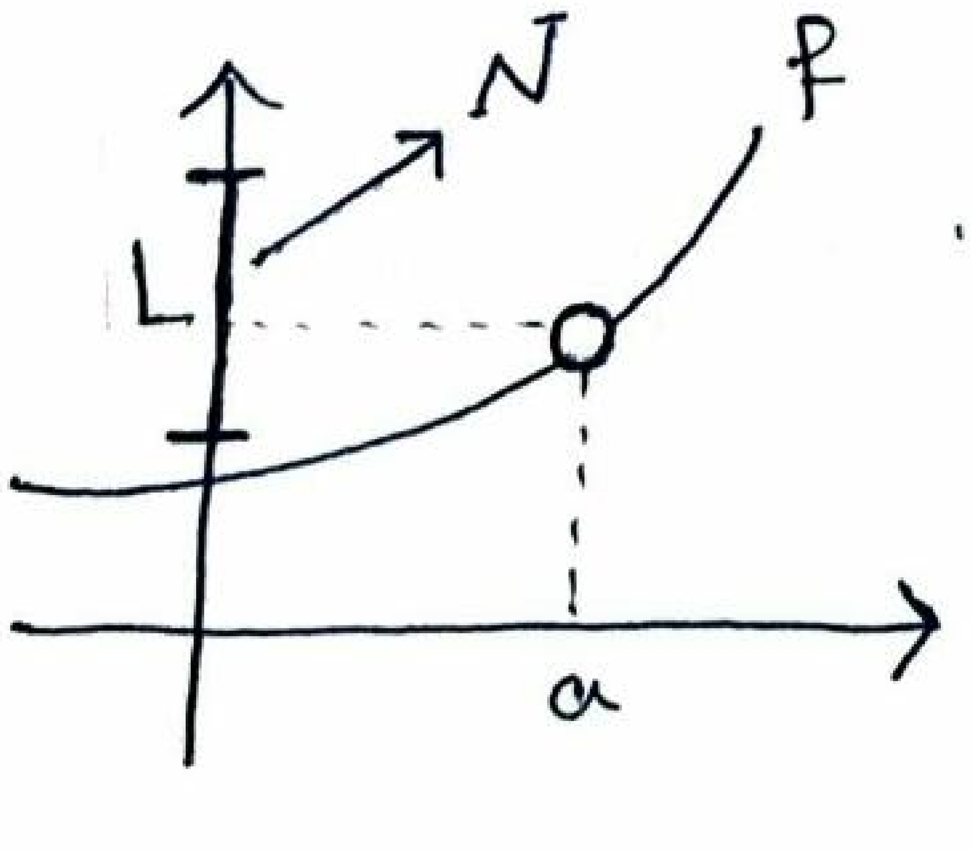
مفهوم حد:

قبل از آنکه به تعریف دقیق حد بپردازیم با رسم شکل و ذکر یک مثال مقدمات آشنایی ذهنی نسبت به این مفهوم را فراهم می‌کنیم. تابعی مانند f را که نمودار آن در زیر رسم شده است در نظر بگیرید:



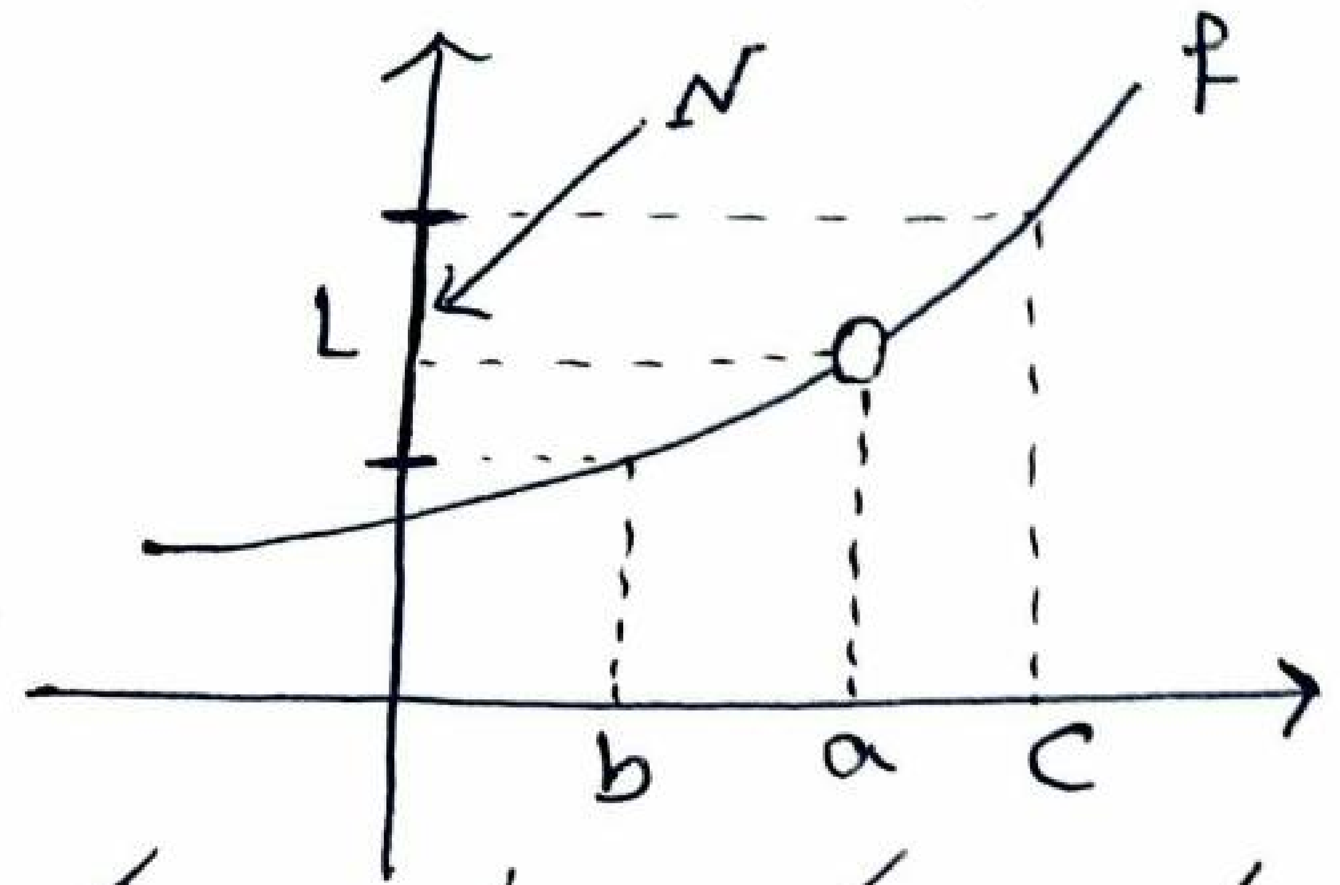
f در نقطه a تعریف نشده است $(a\notin D_f)$.

1- فرض کنیم فاصله دلخواه N که L در وسط آن قرار دارد داده شده باشد.



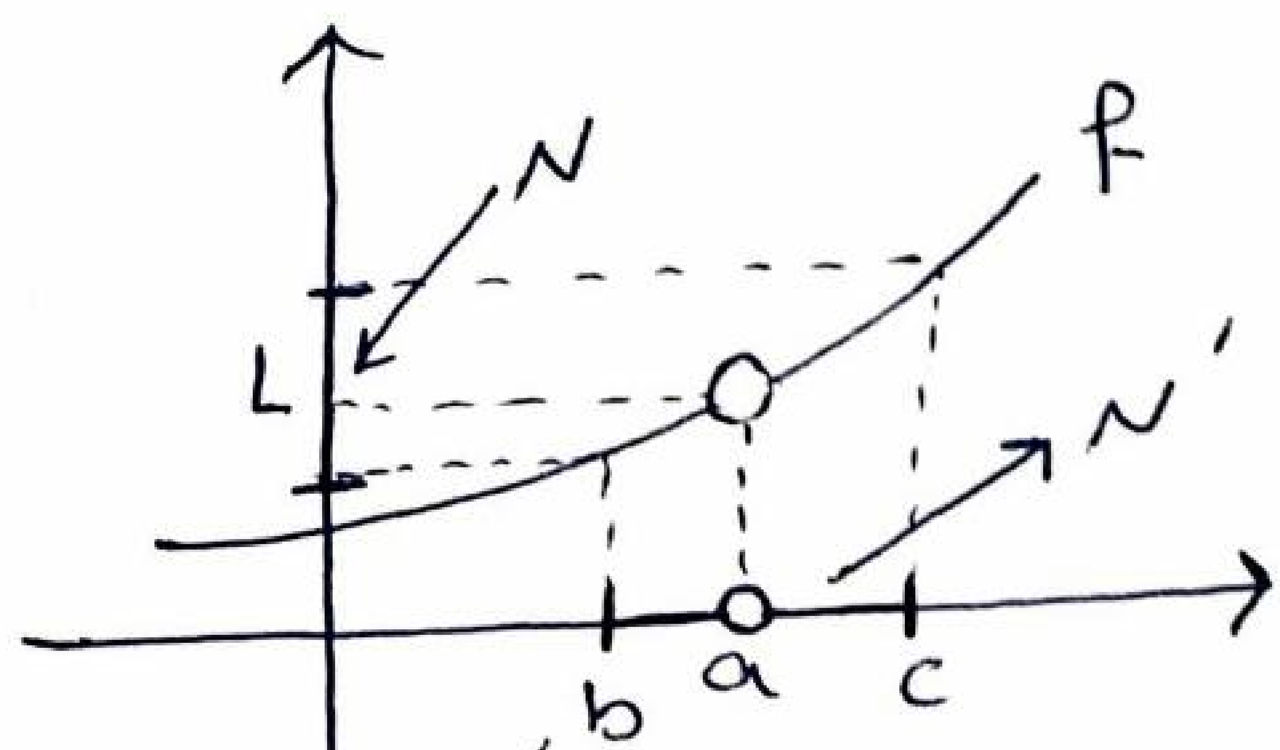
شکل «1»

۲- از دو انتهای این فاصله، خطوط موازی محور xها رسم می‌کنیم و طولهای محل برخورد این خطوط را با نمودار f، به ترتیب b و c می‌نامیم.



شکل «۲»

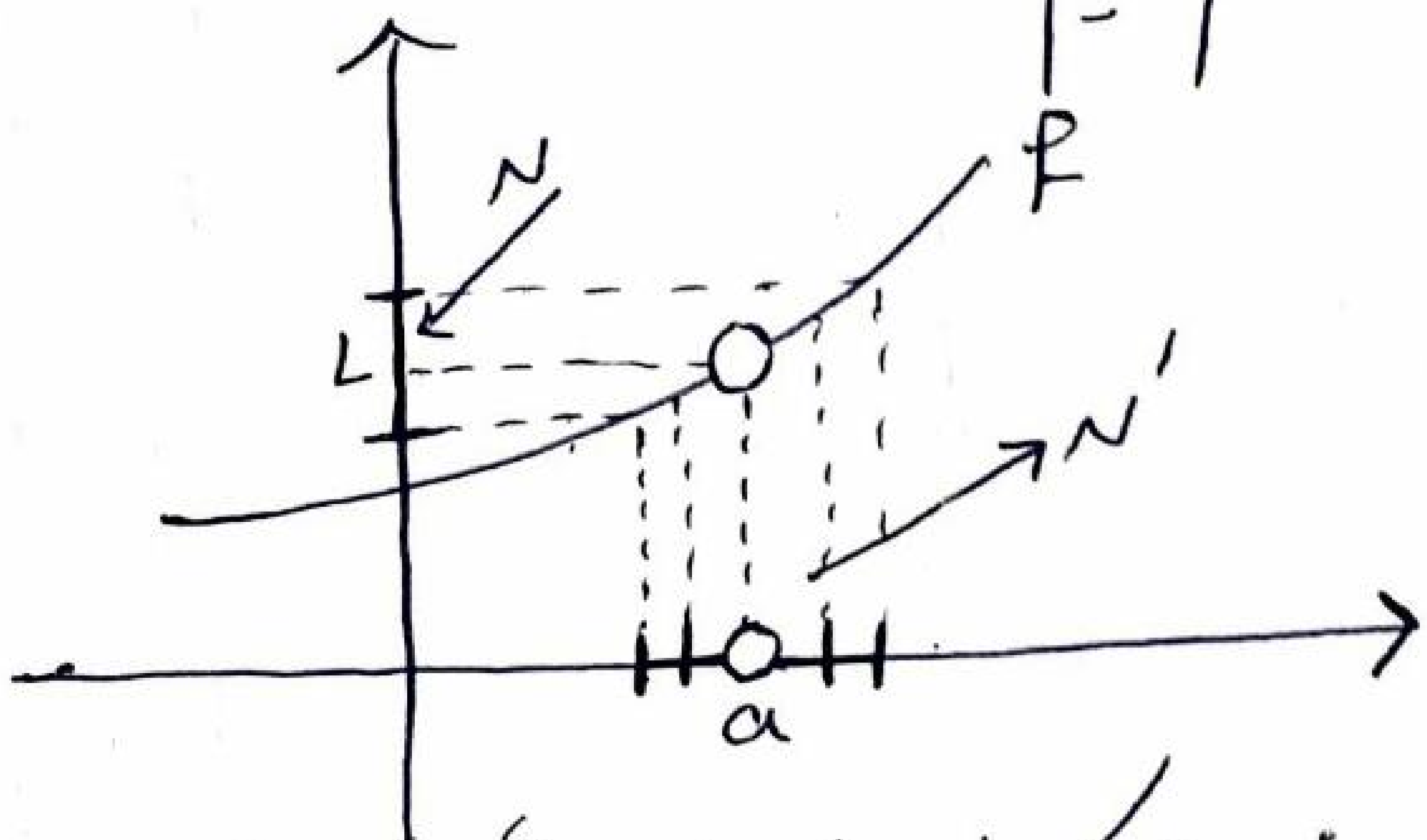
۳- روی پاره خط bc، فاصله‌ای مانند N'، $a \notin N'$، را که دو انتهای آن از a به یک فاصله است در نظر می‌گیریم.



شکل «۳»

دایره کوچکی که به دور a رسم شده است نشان دهنده این است که $a \notin N'$.

۴- خطوطی به موازات محور yها از دو انتهای N' رسم می‌کنیم.



شکل «۴»

در شکل «۴» ملاحظه می‌شود که قسمتی از نمودار f، که بین این دو خط قائم واقع است، بین دو خط افقی که از دو انتهای N رسم شده است نیز واقع شده است. به عبارت دیگر اگر $x \in N'$ باشد $f(x) \in N$ خواهد بود.

در شماره‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ از روی شکل می‌بینیم که برای فاصله مفروض N، فاصله‌ای مانند N' می‌توان یافت بطوریکه $x \in N' \Rightarrow f(x) \in N$. فرض کنیم برای هر فاصله دلخواه N فاصله‌ای مانند N' موجود باشد بطوریکه $x \in N' \Rightarrow f(x) \in N$، در این صورت گوییم، $f(x)$ را هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم به L نزدیک کنیم به شرط آنکه x به اندازه کافی به a نزدیک شود. به عبارت دیگر وقتی x به a نزدیک می‌شود، $f(x)$ به سمت L میل می‌کند و تمام این حرفها را خلاصه می‌گوییم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$