

«دَل مُوِي دَاكِرِه نَبَا دَعَا تَحْكَم اَرْوَت»

رایجی محوری حله لول

یا دَاكِرِه حله لول

مجموعه اعداد مختلط را با فرم $\Phi = \{x+iy \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ تعریف می‌کنیم

مانند $z_1 = 1+3i$, $z_2 = 5-4i$, $z_3 = 6i$, $z_4 = 9$, ...

هر عدد مختلط از دو قسمت حقیقی و موهومی تشکیل شده است. یعنی اگر $z = x+iy$ عدد مختلط را بخواهیم قسمت حقیقی را با $\text{Re } z$ و قسمت موهومی را با $\text{Im } z$ نشان داده و به صورت

$$\text{Re } z = x \quad \text{Im } z = y$$

$$\text{Re}(5-4i) = 5$$

$$\text{Re}(6i) = 0$$

$$\text{Im}(5-4i) = -4$$

$$\text{Im}(6i) = 6$$

تعریف می‌کنیم

دو عدد مختلط $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ دو عدد مختلط را بخواهیم آن‌ها را

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} \text{Re } z_1 = \text{Re } z_2 \\ \text{Im } z_1 = \text{Im } z_2 \end{cases}$$

آن‌ها را

جمع اعداد مختلط

اگر $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ دو عدد مختلط را بخواهیم

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \text{جابجایی}$$

$$\text{Re}(z_1 + z_2) = \text{Re } z_1 + \text{Re } z_2$$

$$\text{Im}(z_1 + z_2) = \text{Im } z_1 + \text{Im } z_2$$

$$Z_1 + (Z_2 + Z_3) = (Z_1 + Z_2) + Z_3$$

$$Z + (-Z) = 0 \quad \forall Z \in \mathbb{C}$$

$$Z + 0 = Z$$

مثال:

$$(1 + 5i) + (7 - 4i) = 8 + i$$

$$(7 - 4i) + (1 - 2i) = 8 - 6i$$

مربع اعداد مختلط

اگر $Z_1 = x_1 + iy_1$ و $Z_2 = x_2 + iy_2$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} Z_1 \cdot Z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + \underbrace{(i^2)}_{-1}y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \end{aligned}$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = Z_2 \cdot Z_1$$

$$Z \cdot 1 = Z$$

$$(1 + 4i)(7 - 5i) = 7 - 5i + 28i - \underbrace{10i^2}_{10} = 17 + i$$

$$(7 - 4i)(7 + 4i) = 49 - \underbrace{16i^2}_{-16} = 65$$

$$(1 + \sqrt{2}i)(\sqrt{2} - i) = \sqrt{2} - i + 2i - \underbrace{\sqrt{2}i^2}_{-\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + i$$

تعریف ۱: اگر $Z = x + iy$ عدد مختلط دلخواه باشد، مربع مزدوج Z ، اعداد $\bar{Z}$ نشان داده می شود.

$$\bar{Z} = x - iy$$

تعریف ۲: $\text{Im } \bar{Z} = -\text{Im } Z$, $\text{Re } Z = \text{Re } \bar{Z}$

$$\overline{1 + 4i} = 1 - 4i \quad \overline{1 + 5i} = 1 - 5i \quad \overline{7i} = -7i \quad \overline{4} = 4$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

اگر $z = x + iy$ باشد $\overline{z} = x - iy$ باشد.

$$z + \overline{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x \Rightarrow x = \frac{z + \overline{z}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}}$$

$$z - \overline{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy \Rightarrow y = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}}$$

تعریف ۲: اگر $z = x + iy$ عدد مختلط دلخواه باشد قدر مطلق یا اندازه z را با $|z|$ نشان داده می‌شود.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$$

تعریف ۳: اگر $z = x + iy$ باشد

$$|1 + 3i| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10} \quad |1 + \sqrt{2}i| = \sqrt{5}$$

$$|1 + \sqrt{2}i| = \sqrt{1 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$|i| = 1 \quad |5i| = 5 \quad |-1| = 1 \quad |-7i| = 7$$

خواص قدر مطلق

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$|z| = |\overline{z}|$$

ی دانستیم اگر $Z = x + iy$ عدد مختلط دلخواه باشد کنه $\bar{Z} = x - iy$

$$Z \cdot \bar{Z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (i)^2 y^2 = x^2 + y^2 = |Z|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{Z \cdot \bar{Z} = |Z|^2}$$

تقسیم اعداد مختلط

اگر $Z_1 = x_1 + iy_1$ ، $Z_2 = x_2 + iy_2$ اعداد مختلط دلخواه و $Z_2 \neq 0$ کنه

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{\text{مزدوج مخرج}}{\text{مزدوج مخرج}}$$

$$= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{1+2i+i^2}{2} = \frac{2i}{2} = i \quad \text{مثال}$$

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i} \times \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{4} + i \frac{3-1}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} + i \frac{2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$$

$$\frac{1-i}{1+5i} \times \frac{1-5i}{1-5i} = \frac{-2}{26} + i \frac{-14}{26}$$

خواص تقسیم اعداد مختلط

$$\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$$

$$\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2} \right)} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$$