

تکسیر دامنه تابع :

(۱) دامنه توابع چند جمله‌ای برابر با $\mathbb{R}$ است.

(۲) برای تکسیر دامنه توابع کسری ابتدا خارج کسر را برابر با صفر قرار می‌دهیم و نتیجه‌های آن را معادله‌ای می‌کنیم و در ادامه داریم :

$$D_f = \mathbb{R} - \{ \text{نتیجه خارج کسر} \}$$

(۳) دامنه توابع رادیکالی با فرم خروج : برای تکسیر دامنه این توابع عبارت زیر را در یکال را نیز بر مساوی صفر قرار می‌دهیم

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \Rightarrow D_f = \{x \mid g(x) \geq 0\} \quad (2n \text{ بیانش عدد زوج است})$$

(۴) دامنه توابع رادیکالی با فرم خروج عبارت است از آنکه مقدار صفر x که عبارت زیر را در یکال به ازای آن‌ها تعریف شده باشد.

$$f(x) = \sqrt[n+1]{g(x)} \Rightarrow D_f = D_g \quad (2n+1 \text{ بیانش عدد فرد است})$$

(۵) دامنه تابع $f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ برابر است با :

$$D_f = \{x \mid g(x) > 0, h(x) > 0, h(x) \neq 1\}$$

* در فصل آینده در مورد تابع لگاریتمی $(\log)$ صحبت خواهیم کرد.

مثال : دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = x^2 + x + 1 \rightarrow D_f = \mathbb{R}$ چون یک چند جمله‌ای است.

ب) $f(x) = \frac{1}{x+1} \rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1 \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ (نتیجه خارج کسر)

ج) $f(x) = \frac{x(x+1)}{x^2+2x} \rightarrow x^2+2x=0 \Rightarrow x(x^2+2)=0 \Rightarrow x=0 \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

د) $f(x) = \sqrt{4-x^2} \rightarrow 4-x^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 \geq -4 \Rightarrow x^2 \leq 4$
 در منفی ضرب می‌کنیم تا علامت نامساوی عوض می‌شود
 از طرفین جذر می‌گیریم
 $|x| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_f = [-2, 2]$

خاصیت قدر مطلق $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 7x + 10}{1-x}} \rightarrow \text{حل: } \frac{x^2 - 7x + 10}{1-x} \geq 0$$

در این مثال برای تعیین دامنه از آنجا که عبارت زیر رادیکال باید مثبت باشد و مخرج هم مثبت باشد و آنجا که این دو شرط را با هم ترکیب می‌کنیم به آنجا که دامنه را می‌توانیم به دست آوریم.

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \xrightarrow{\text{انفاد}} (x-2)(x-5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x-2=0 \rightarrow x=2 \\ x-5=0 \rightarrow x=5 \end{cases}$$

$$1-x=0 \Rightarrow -x=-1 \Rightarrow x=1$$

x	$-\infty$	1	2	5	$+\infty$
$x^2 - 7x + 10$	+	+	0	0	+
$1-x$	+	0	-	-	-
$\frac{x^2 - 7x + 10}{1-x}$	+	-	+	-	-
		ج.		ج.	

$$D = (-\infty, 1) \cup [2, 5]$$

دقت شود بازه را از سمت عدد 1 بازتر است و از سمت عدد 2 بسته است. زیرا مخرج کسر است و باید از دامنه خارج شود.

$$f(x) = \log \sqrt{x^2 + 7x + 4} \rightarrow \text{حل: } x^2 + 7x + 4 > 0$$

$$x^2 + 7x + 4 = 0 \xrightarrow{\text{انفاد}} (x+1)(x+4) = 0 \rightarrow \begin{cases} (x+1)=0 \Rightarrow x=-1 \\ (x+4)=0 \Rightarrow x=-4 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-4	-1	$+\infty$
$x^2 + 7x + 4$	+	0	0	+
		ج.		ج.

$$D = (-\infty, -4) \cup (-1, +\infty)$$

تعیین: دامنه $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ را بیابید.

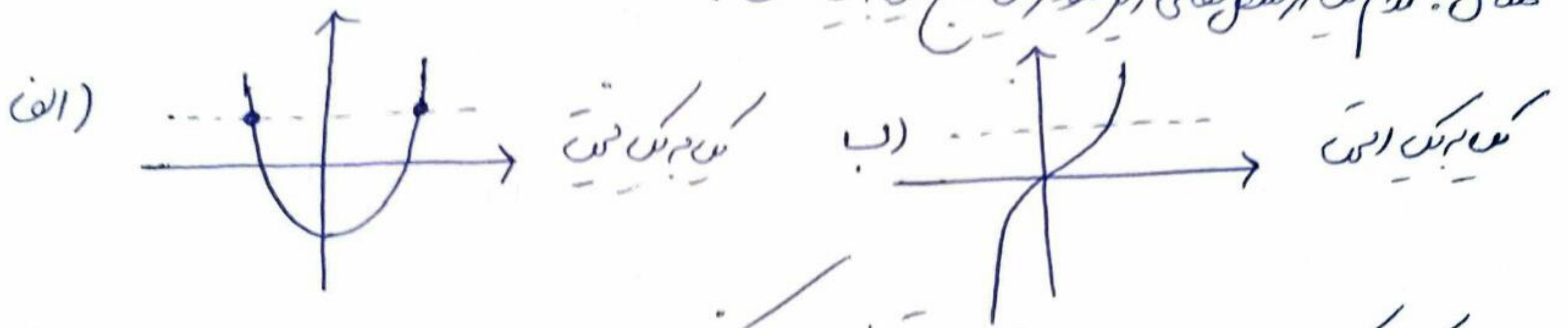
تابع یک به یک: تعریف: تابع $f: A \rightarrow B$ را یک به یک گوئیم هرگاه

تکثر: $\forall$ به ازای هر $x \in D_f$: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (*)
 اگر $f: A \rightarrow B$ یک به یک باشد، آنگاه

عبارت (*) به این معنی خواهد بود که به ازای هر x_1 و x_2 متعلق به دامنه f ، اگر $f(x_1) = f(x_2)$ باشد، آنگاه $x_1 = x_2$ خواهد بود.

تشخیص یک به یک بودن تابع از روی نمودار: خطی به موازات محور x ها را رسم می کنیم. اگر نمودار تابع را فقط در یک نقطه قطع کند، تابع یک به یک است.

مثال: کدام یک از شکل های زیر نمودار یک تابع یک به یک است.



مثال: یک به یک بودن توابع زیر را با استفاده از تعریف بررسی کنید.

(الف) $f(x) = x + 1$ $\rightarrow$ حل: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$
 بنابراین یک به یک است.

(ب) $f(x) = \sqrt{x+4}$ $\rightarrow$ حل: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1+4} = \sqrt{x_2+4} \Rightarrow x_1+4 = x_2+4 \Rightarrow x_1 = x_2$
 حال که فرض را بر آن می گذاریم تا ادا کمال از این برود $\leftarrow$
 تعیین: یک به یک بودن تابع زیر را بررسی کنید. $(f(x) = 2 - x^2)$

ترکیب دو تابع: ترکیب دو تابع f و g را که به هم سازگار باشند، $g \circ f$ نشان داده می شود بصورت $g \circ f(x) = g(f(x))$

تعریف می کنیم، برای معادله $g \circ f(x) = g(f(x))$ به جای x های موجود در قسمت g ، قسمت $f(x)$ را

جایگزین می کنیم. در این صفت فرض را بر این می گذاریم که تابع $g \circ f$ و $f \circ g$ قابل تعریف باشند و از آنجا که هر دو تابع به هم سازگارند.

تذکره: ترکیب تابع دارای خاصیت زیر می باشد:

الف) $f \circ g(x) = f(g(x)) \Rightarrow g \circ f(x) = g(f(x))$

ب) $f \circ f(x) = f(f(x)) \Rightarrow g \circ g(x) = g(g(x))$

مثال: اگر $f(x) = \frac{x}{x+1}$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$ باشد

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x+1}) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} + 1}$

مثال: اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = x+1$ باشد

الف) $f \circ g(x)$ ب) $g \circ f(x)$ ج) $f \circ f(x)$ د) $g \circ g(x)$

الف) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$

ب) $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$

ج) $f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x^2) = (x^2)^2 = x^4$

د) $g \circ g(x) = g(g(x)) = g(x+1) = (x+1) + 1 = x+2$

تابع صعودی و نزولی: فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ باشد. $f(x)$ یک تابع صعودی و نزولی است.
 متعلق به دامنه f باشد $(x_1, x_2 \in D_f)$

۱) تابع f را صعودی می گویند هرگاه داشته باشیم $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

۲) تابع f را اکیدا صعودی می گویند هرگاه داشته باشیم $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

۳) تابع f را نزولی می گویند هرگاه داشته باشیم $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$

۴) تابع f را اکیدا نزولی می گویند هرگاه داشته باشیم $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

تابع یکنوا: هر تابع صعودی یا نزولی یکنوا می باشد.

تابع اکیدا یکنوا: هر تابع اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی یکنوا می باشد.

تعریف: تابع f را زوج گوییم هرگاه داشته باشیم:

۱) $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ (دامنه متقارن باشد)

۲) $\forall x \in D_f ; f(-x) = f(x)$

تعریف: تابع f را فرد گوییم هرگاه داشته باشیم:

۱) $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

۲) $\forall x \in D_f ; f(-x) = -f(x)$

مثال: زوج یا فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید.

① دامنه متقارن است $\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \Rightarrow x^2 + 4 \neq 0$ چون $x^2 + 4 \geq 4$ و $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4}$ (الف)

تابع زوج است $\Rightarrow$ ① و ② $\Rightarrow f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 + 4} = \frac{x^2}{x^2 + 4} = f(x)$ ②

① دامنه متقارن است $\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \Rightarrow x^2 + 4 \neq 0$ و $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$ (ب)

② $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 4} = \frac{-x}{x^2 + 4} = -\frac{x}{x^2 + 4} = -f(x)$

① و ② $\rightarrow$ تابع فرد است.

مثال: زوج یا فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید.

۱) $f(x) = x^2 + 1$

۲) $f(x) = x^2 - 1$

۳) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

تذکره: تابع صفر هم زوج و هم فرد است و تنها تابعی است که دارای این خاصیت است.

تعریف: اگر f تابعی با دامنه متقارن باشد تابع زوج یا فرد:

(الف) $\frac{f(x) + f(-x)}{2} \rightarrow$ زوج است

(ب) $\frac{f(x) - f(-x)}{2} \rightarrow$ فرد است

توانج مشتقاتی :

اگر (x و y) نقطه ای در صفحه مختصات باشد، از مبدأ تا آن خط وصل کنیم و زاویه آن را با محور x ها زاویه θ می سازد، خطوط مشتقاتی زاویه θ را در هر نقطه از آن خطوط می سازد :



(سینوس تان) $\sin \theta = \frac{\text{ضلع مقابل به } \theta}{\text{وتر}} = \frac{y}{r}$

(کسینوس تان) $\cos \theta = \frac{\text{ضلع مجاور به } \theta}{\text{وتر}} = \frac{x}{r}$

دائران تان $\tan \theta = \frac{\text{ضلع مقابل به } \theta}{\text{ضلع مجاور به } \theta} = \frac{y}{x}$

(کوتان تان) $\cot \theta = \frac{\text{ضلع مجاور به } \theta}{\text{ضلع مقابل به } \theta} = \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan \theta}$

تذکره: ضلع روبه روی زاویه حاده را در هر محاسبه.

$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{r}{x}$
(سکانت تان)

$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{r}{y}$
(کسکانت تان)

نکته: چهار رابطه مشتقاتی مهم:

1) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 2) $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ 3) $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$

4) $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ 5) $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$

6) $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ 7) $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$ 8) $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

9) $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

نکته: در بین توانج مشتقاتی $\cos \theta$ و $\sec \theta$ زوج هستند و بقیه توانج مشتقاتی فرد هستند:

$\sin(-\theta) = -\sin \theta$ $\tan(-\theta) = -\tan \theta$ $\sec(-\theta) = \sec \theta$

$\cos(-\theta) = \cos \theta$ $\cot(-\theta) = -\cot \theta$ $\csc(-\theta) = -\csc \theta$

تذکره: در اصطلاح منبسط $\cos \theta$ و $\sec \theta$ منفی را می‌شود و وقتی توابع مثبت می‌باشند منفی را منفرجه می‌دهند.

مثال: بررسی کنید $\tan \theta$ و $\cot \theta$ فرد هستند؟

$$\text{حل: } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \Rightarrow \tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta$$

$\Leftarrow \tan \theta$ تابعی فرد است.

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Rightarrow \cot(-\theta) = \frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)} = \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = -\cot \theta$$

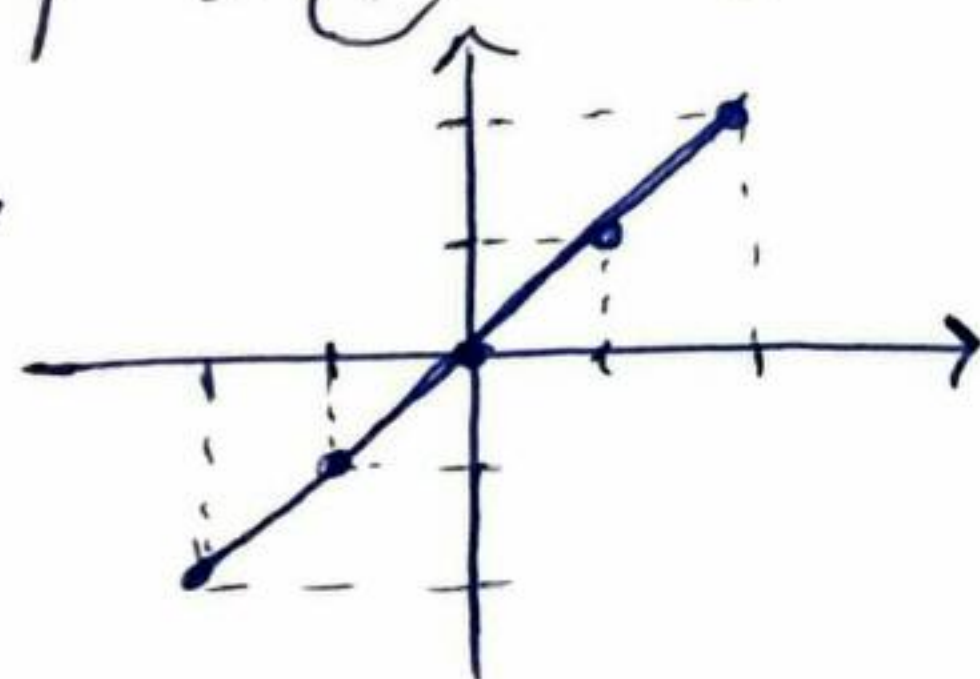
$\Leftarrow \cot \theta$ تابعی فرد است.

رسم نمودار تابع: برای رسم نمودار توابع به مقیاس x مقیاس داده و مقدار مقیاس y را بدست می‌آوریم (باید به هر دو مقیاس x و y توجه داشت).
 مرتبه حاصل می‌شود که در صفحه مختصات آن را نمایش می‌دهیم و با وصل کردن این زوج‌های مرتب نمودار تابع حاصل می‌شود.

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

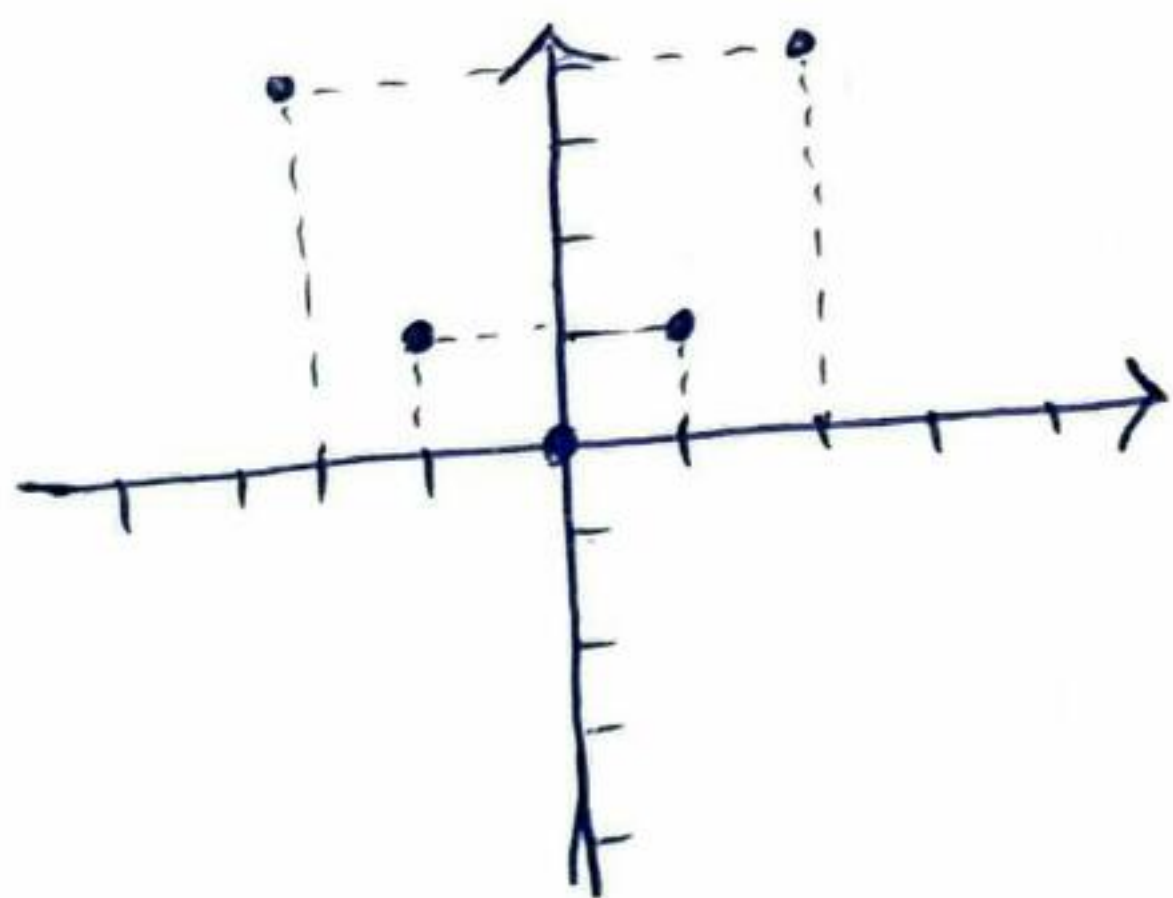
الف) $f(x) = x$ $\Rightarrow$

x	0	1	-1	2	-2
$f(x)=y$	0	1	-1	2	-2

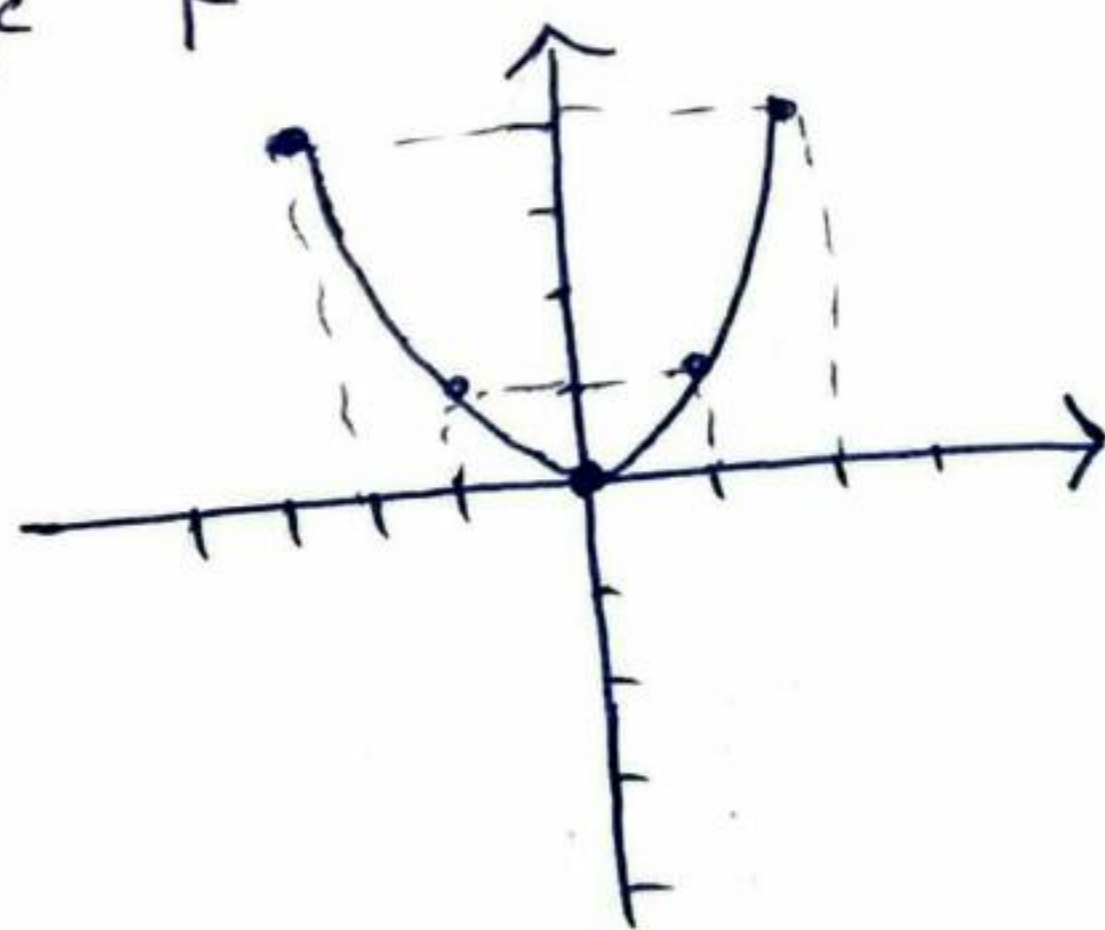


ب) $f(x) = x^2$ $\Rightarrow$

x	0	1	-1	2	-2
y	0	1	1	4	4



حال نقاط را به هم وصل می‌کنیم



ج) $f(x) = x^3$

د) $f(x) = x+1$

به عنوان تمرین، نمودار توابع فوق را رسم کنید.