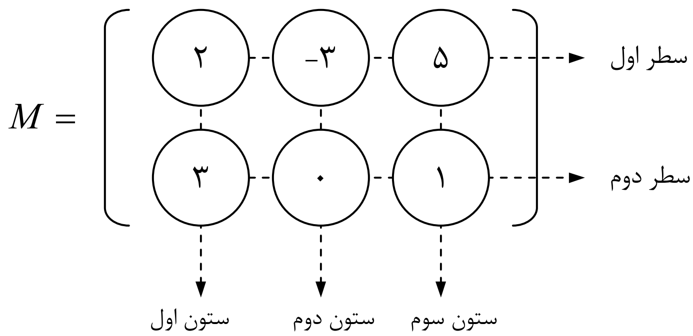
در این فصل با مفهوم ماتریس و ویژگی های آن آشنا می شوید و در نهایت از این مفهـوم بـرای حـل دستگاه های معادلات خطی استفاده می کنیم.

مفهوم ماتریس

هر چینش مستطیل شکل از اعداد ، در قالب سطر و ستون را یک ماتریس می‌نامند. هر ماتریس را با یک حرف بزرگ لاتین نامگذاری می‌کنند. مانند ماتریس زیر



این ماتریس دارای دو سطر و سه ستون است[۱]. در اصطلاح گویند این ماتریس دارای مرتبه‌ی ۳ × ۲ است[۲]. هر یک از اعداد تشکیل دهنده‌ی ماتریس را درایه می‌نامند. اگر درایه k در سطر i و سـتون j قرار دارد، می‌نویسند.

$$a_{ij} = k$$

مثلاً در ماتریس فوق می توان نوشت : $a_{۲۳} = ۱$ و $a_{۱۲} = -۳$ و $a_{۲۲} = ۰$ و $a_{۲۱} = ۳$

تمرین : ماتریس زیر را در نظر بگیرید. سپس :

الف) مرتبه‌ی ماتریس را بنویسید.

ب) درایه‌ی واقع در سطر دوم و ستون اول کدام است.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ \\ -۲ & ۰ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

حل : الف) مرتبه ی ماتریس ۲ × ۴ است. ب) $a_{۲۱} = ۳$

---

[1] . سطر ها را از بالا به پایین و ستون ها را از چپ به راست شماره گذاری می کنند.

[2] . اگر ماتریسی دارای m سطر و n ستون باشد. در این صورت گویند ماتریس از مرتبه ی $m \times n$ است.

تمرین : اگر i شماره ی سطر و j شماره ی ستون هر درایه باشند. ماتریس زیـر را بـا درایـه هـایش بنویسید.

$$A=[i^{۲}+j^{۲}]_{۲\times۳}$$

حل :

$$A=[i^{۲}+j^{۲}]_{۲\times۳}=\begin{bmatrix}(۱)^{۲}+(۱)^{۲} & (۱)^{۲}+(۲)^{۲} & (۱)^{۲}+(۳)^{۲}\\(۲)^{۲}+(۱)^{۲} & (۲)^{۲}+(۲)^{۲} & (۲)^{۲}+(۳)^{۲}\end{bmatrix}_{۲\times۳}=\begin{bmatrix}۲ & ۵ & ۱۰\\۵ & ۸ & ۱۳\end{bmatrix}_{۲\times۳}$$

تمرین برای حل : اگر i شماره ی سطر و j شماره ی ستون هر درایه باشند. در هـر مـورد مـاتریس داده شده را تشکیل دهید.

۱) $A=[۳i+۲j]_{۲\times۲}$

۲) $B=[-ij]_{۳\times۳}$

۳) $C=[۳j]_{۳\times۲}$

۴) $D=[۲(-۱)^{i+j}]_{۳\times۳}$

❊❊❊

ماتریس مربعی

اگر تعداد سطر و ستون‌های یک ماتریس برابر باشند، آن ماتریس را مربعی می‌نامند.

مانند ماتریس‌های زیر.

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\۳ & -۱\end{bmatrix}$$ و $$B=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۱\\۰ & ۲ & ۰\\-۱ & ۱ & -۱\end{bmatrix}$$

هر ماتریس مربعی مانند یک چهارضلعی دارای دو قطر است. قطری که درایه هـای a_{ij} بـرای $i=j$ روی آن قرار دارند را قطر اصلی و دیگری را قطر فرعی می نامند.

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\۳ & -۱\end{bmatrix}$$

قطر فرعی   قطر اصلی

$$B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ -۱ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

قطر فرعی   قطر اصلی

❊❊❊

معرفی چند ماتریس خاص

۱) ماتریس سطری : ماتریسی است که فقط یک سطر دارد. مانند ماتریس زیر

$$A = [۱ \quad ۳ \quad -۱ \quad ۵]_{۱\times۴}$$

۲) ماتریس ستونی: ماتریسی است که فقط یک ستون دارد. مانند ماتریس زیر

$$B = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ -۲ \end{bmatrix}_{۳\times۱}$$

۳) ماتریس صفر : ماتریسی است که همه‌ی درایه‌های آن صفر باشند. مانند ماتریس زیر

$$O = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times۳}$$

در این فصل ماتریس صفر را با نماد O نمایش می دهیم.

۴) ماتریس همانی (واحد): یک ماتریس مربعی می‌باشد که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن یک و بقیه‌ی درایه‌ها صفر هستند. مانند ماتریس زیر

$$I_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۳\times۳} \qquad I_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۲\times۲}$$

۵) ماتریس قطری : یک ماتریس مربعی است که همه ی درایه هـای خـارج از قطـر اصـلی آن صـفر باشند. مانند ماتریس زیر

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

۶) ماتریس پایین مثلثی: یک ماتریس مربعی است که تمام درایـه هـای بـالای قطـر اصـلی آن صـفر باشند. مانند ماتریس زیر

$$B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۲ & ۰ \\ ۵ & ۶ & ۳ \end{bmatrix}$$

۷) ماتریس بالا مثلثی : یک ماتریس مربعی است که تمام درایه های پایین قطر اصلی آن صفر باشند. مانند ماتریس زیر

$$C = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

۸) ماتریس اسکالر : یک ماتریس قطری است که تمام درایه هـای روی قطـر اصـلی آن برابـر باشـند. مانند ماتریس های زیر

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

***

ماتریس های مساوی

دو ماتریس را مساوی می گویند، هرگاه:

الف : هم مرتبه باشند.

ب : درایه های متناظر آنها نظیر به نظیر مساوی باشند.یعنی برای هر j و i

$$(A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij})$$

مثلاً:
$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & -۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & -۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$$

تمرین برای حل :

۱ : دو ماتریس زیر مساویند. مقدار b و a را تعیین کنید.

$$A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & a\\ ۲ & ۰ & ۵\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۳\\ ۲ & ۲a+b & ۵\end{bmatrix}$$

۲ : دو ماتریس زیر مساویند. مقدار y و x را تعیین کنید.

$$A=\begin{bmatrix}۳ & x+۱\\ ۲ & ۳\\ ۱ & y\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix}۳ & y^{۲}+۱\\ ۲ & ۳\\ ۱ & ۵\end{bmatrix}$$

***

ضرب عدد در یک ماتریس : (ضرب اسکالر)

برای ضرب یک عدد در یک ماتریس کافی است آن عدد را درتمام درایه‌ها ضرب کنیم. برای مثال

$$A=\begin{bmatrix}-۱ & ۳ & ۵\\ ۲ & ۰ & -۷\end{bmatrix}$$
$$\rightarrow ۲A=\begin{bmatrix}-۲ & ۶ & ۱۰\\ ۴ & ۰ & -۱۴\end{bmatrix}$$

اگر تمام درایه های یک ماتریس را در عدد ۱− ضرب کنیم. ماتریس حاصل را ماتریس قرینه می نامند. به عبارتی ساده تر اگر تمام درایه‌های ماتریسی را قرینه کنیم ماتریس جدیدی بدست می‌آید که آن را ماتریس قرینه می گویند. برای مثال

$$A=\begin{bmatrix}-۱ & ۳ & ۵\\ ۲ & ۰ & -۷\end{bmatrix}$$

$$-A=\begin{bmatrix}۱ & -۳ & -۵\\ -۲ & ۰ & ۷\end{bmatrix}$$ ماتریس قرینه

***

اعمال روی ماتریس ها

در ادامه اعمال روی ماتریس ها را معرفی می کنیم.

الف : جمع ماتریس‌ها

دو ماتریس را وقتی می‌توان جمع کرد که هم مرتبه باشند. در این صورت درایه‌های نظیر به نظیـر بـا هم جمع می‌شوند. برای مثال

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۰ & -۷ \end{bmatrix} \qquad \text{و} \qquad B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ & ۷ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A+B=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۰ & -۷ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ & ۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۷ \\ ۱ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

ب : تفاضل ماتریس‌ها

برای تفاضل دو ماتریس کافی است ماتریس اولی را با قرینه‌ی دومی جمع کنیم.

$$A-B=A+(-B)$$

برای مثال

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۰ & ۷ \end{bmatrix} \qquad \text{و} \qquad B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ & ۷ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A-B=A+(-B)=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۰ & ۷ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۳ & -۱ & -۲ \\ ۱ & -۳ & -۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۴ & ۲ & ۳ \\ ۳ & -۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

نتیجه :

۱) حاصل جمع هر ماتریس با ماتریس صفر هم مرتبه اش، برابر همان ماتریس است.

$$A+O=A$$

۲) حاصل جمع هر ماتریس با ماتریس قرینه اش، برابر ماتریس صفر است.

$$A+(-A)=O$$

۳) جمع ماتریس ها خاصیت جابجایی دارد.

$$A+B=B+A$$

۴) جمع ماتریس ها خاصیت شرکت پذیری دارد.

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

ج : ضرب ماتریس :

دو ماتریس را وقتی می‌توان در هم ضرب کرد که تعداد ستون های اولی برابر تعداد سطر های دومی باشد. در این صورت هر درایه‌ی ماتریس حاصل ضرب را به شکل ضرب داخلی تعیین می‌کنیم.

مثال ۱ :

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۵ & ۲ & ۳ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۵ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}_{۲\times۳}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}_{۳\times۴}=\begin{bmatrix} ۱۲ & ۱۳ & ۵ & ۳ \\ ۱۸ & ۲۳ & ۱۹ & ۵ \end{bmatrix}_{۲\times۴}$$

مثال ۲ :

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۰ & ۷ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۰ & ۷ \end{bmatrix}_{۲\times۳}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}_{۳\times۲}=\begin{bmatrix} ۲۴ & ۱۱ \\ ۳۷ & ۲۳ \end{bmatrix}_{۲\times۲}$$

تذکر ۱ : ضرب دو ماتریس خاصیت جابجایی ندارد. زیرا اگر $A\times B$ تعریف می شود، ممکن است $B\times A$ قابل تعریف نباشد و ممکن است قابل تعریف باشد ولی حاصل برابر $A\times B$ نشود.

به نمونه های زیر توجه کنید.

نمونه ی اول :

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}_{۲\times۲}\times\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}_{۲\times۳}=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۲ \\ ۴ & -۲ & -۲ \end{bmatrix}_{۲\times۳}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}_{۲\times۳}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}_{۲\times۲}= \text{تعریف نمی شود.}$$

$$\rightarrow A\times B\neq B\times A$$

نمونه ی دوم :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}_{2\times 2}\times\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}_{2\times 2}=\begin{bmatrix}3 & 11\\ 4 & 16\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}_{2\times 2}\times\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}_{2\times 2}=\begin{bmatrix}4 & 7\\ 8 & 15\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\rightarrow A\times B\neq B\times A$$

تذکر ۲ : ضرب ماتریس ها خاصیت شرکت پذیری دارد.

$$A(BC)=(AB)C$$

تذکر ۳ : ضرب ماتریس ها نسبت به جمع آنها توزیع پذیر است.

$$A(B+C)=AB+AC$$

تذکر ۴ : اگر A یک ماتریس مربعی و r یک عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی باشند. در این صورت:

۱) $A^1=A$ ۲) $A^n=A^{n-1}\times A$ ۳) $I^n=I$ ۴) $(rA)^n=r^nA^n$

تمرین برای حل :

۱ : اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ -4 & 5 & 0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 5\\ -2 & 4\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$ و $D=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 4\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ مطلوب است محاسبه ی

الف) $3A=$ ج) $A\times C$ هـ) $A\times B$

ب) $B+D=$ د) $B-D$

۲ : اگر $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 5\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{bmatrix}$ ماتریس $A\times B\times C$ را بدست آورید.

۳ : اگر $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 5\end{bmatrix}$ ماتریس های زیر را در صورت امکان بدست آورید.

الف) $A \times B =$ ب) $B \times A =$ ج) $A^{۲} =$

۴ : اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ در این صورت ماتریس $A^{۳}$ را تعیین کنید.

۵ : اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ در این صورت ماتریس $A^{۲} + AB + ۲B$ را بیابید.

۶ : اگر $A = \begin{bmatrix} mn & n^{۲} \\ -m^{۲} & -mn \end{bmatrix}$ نشان دهید که $A^{۲} = O$

۷ : اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۳ \\ ۵ & ۲ & ۶ \\ -۲ & -۱ & -۳ \end{bmatrix}$ نشان دهید که $A^{۳} = O$

۸ : اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}$ نشان دهید که

$$A(B+C) = AB + AC$$

۹ : معادله ی ماتریسی $\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & y \\ x & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ را حل کنید.

۱۰ : اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۴ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ در این صورت ماتریس های زیر را بیابید.

الف) $(A+B) \times (A-B)$ ب) $(A+B)^{۲}$

۱۱ : مقادیر b و a را طوری پیدا کنید که $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ -۲ & ۳ & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ b \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ \\ ۳ \end{bmatrix}$

۱۲ : ماتریس X را طوری بیابید که $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۷ & ۰ \end{bmatrix}$

***

ترانهاده ی یک ماتریس

اگر جای سطر ها و ستون های یک ماتریس را جا به جا کنیم، ماتریس دیگری حاصل می شود که آنرا ماتریس ترانهاده می نامند. ترانهاده ی ماتریس A را به صورت A^t نمایش می دهند.

نتیجه : اگر مرتبه ی ماتریس A برابر $m \times n$ باشد. مرتبه ی ترانهاده ی آن یعنی A^t برابر $n \times m$است.

تمرین: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱- \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ در این صورت ترانهاده ی ماتریس A را بنویسید.

حل :

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۳ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}_{۳\times۲} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۳ & -۱ \end{bmatrix}_{۲\times۳}$$

تمرین برای حل : اگر $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ حاصل عبارت $A^۲ - A^t + I_۲$ را بدست آورید.

تذکر: اگر B و A دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند و r یک عدد حقیقی باشند. در این صورت:

۱) $(A+B)^t = A^t + B^t$ ۳) $(AB)^t = B^t A^t$ ۵) $(A^t)^n = (A^n)^t$

۲) $(rA)^t = rA^t$ ۴) $(A^t)^t = A$ ۶) $I^t = I$

تمرین برای حل :

۱ : اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & -۴ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$ نشان دهید که $(AB)^t = B^t A^t$

۲ : تساوی مقابل را ثابت کنید. $(AB^t - BA^t)^t = BA^t - AB^t$

***

ماتریس های متقارن و پادمتقارن

یک ماتریس مربعی را **متقارن** می گویند، هرگاه با ترانهاده اش برابر باشد.

$$A^t = A$$

اگر ترانهاده‌ی یک ماتریس مربعی با قرینه‌ی آن ماتریس برابر باشد، آن ماتریس را **پاد متقارن** گویند.

$$A^t = -A$$

تمرین: نشان دهید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}$ متقارن و ماتریس $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ پادمتقارن است.

حل :

$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} \rightarrow A = A^t \quad \rightarrow$ ماتریس A متقارن است.

$B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} \rightarrow B^t = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} \rightarrow B = B^t \rightarrow$ ماتریس B پاد متقارن است.

تمرین برای حل: نشان دهید که ماتریس $C = \begin{bmatrix} ۰ & -۳ & ۲ \\ ۳ & ۰ & -۵ \\ -۲ & ۵ & ۰ \end{bmatrix}$ پادمتقارن است.

نتیجه : ماتریس واحد ، متقارن است. $I^t = I$

تمرین: ثابت کنید که ماتریس مربعی صفر هم متقارن و هم پادمتقارن است.

حل : فرض می کنیم که A یک ماتریس مربعی دلخواه بوده که هم متقارن و هم پادمتقارن می باشد.

ثابت می کنیم که این ماتریس باید ماتریس صفر باشد.

$A^t = A \rightarrow A = A^t \rightarrow$ ماتریس A متقارن است.

$A^t = -A \rightarrow A = -A^t \rightarrow$ ماتریس A پادمتقارن است.

$$\rightarrow A + A = A^t + (-A^t) \rightarrow ۲A = O \rightarrow A = O$$

تذکر : اگر ماتریس A متقارن باشد، ماتریس rA نیز متقارن می باشد. همچنین اگر ماتریس A پادمتقارن باشد، ماتریس rA نیز پادمتقارن می باشد.

تمرین: اگر A یک ماتریس مربعی باشد. نشان دهید که

الف) ماتریس $M = A + A^t$ متقارن است. ب) ماتریس $N = A - A^t$ پاد متقارن است.

حل:

الف)

$$M^t = (A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t = M$$

ب)

$$N^t = (A - A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t) = -N$$

تمرین: نشان دهید که هر ماتریس مربعی را می توان به شکل مجموعی از یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن نوشت.

حل: با توجه به تمرین های قبل اگر A یک ماتریس مربعی باشد، ماتریس های $\frac{۱}{۲}M = \frac{۱}{۲}(A + A^t)$ متقارن و ماتریس $\frac{۱}{۲}N = \frac{۱}{۲}(A - A^t)$ پادمتقارن است. در این صورت:

$$\frac{۱}{۲}M + \frac{۱}{۲}N = \frac{۱}{۲}(A + A^t) + \frac{۱}{۲}(A - A^t) = \frac{۱}{۲}A + \frac{۱}{۲}A^t + \frac{۱}{۲}A - \frac{۱}{۲}A^t = ۲(\frac{۱}{۲}A) = A$$

$$A = \frac{۱}{۲}(M + N)$$

تمرین : ماتریس زیر را به صورت مجموعی از یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن بنویسید.

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

حل :

$$M = A + A^t = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$N = A - A^t = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۱ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{۱}{۲}(M + N) \rightarrow \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۲}(\begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix})$$

تمرین برای حل : ماتریس زیر را به صورت مجموعی از یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن بنویسید.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \\ ۱ & -۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

***

دترمینان ماتریس مربعی

برای هر ماتریس مربعی مانند A عددی به نام دترمینان آن ماتریس نسبت داده می شود. این عدد با توجه به مرتبه ی ماتریس به روشی خاص بدست می آید. در اینجا فقط دترمینان ماتریس های مربعی مرتبه ی ۲×۲ و ۳×۳ را معرفی می کنیم.

توجه : دترمینان ماتریس مربعی A را با نماد $|A|$ یا $\det(A)$ نمایش می دهند.

دترمینان ماتریس مربعی مرتبه ی ۲×۲

طبق تعریف دترمینان ماتریس ۲×۲ با تفاضل حاصل ضرب درایه های قطر فرعی از حاصل ضرب درایه های قطر اصلی بدست می آید.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow |A| = ad - bc$$

تمرین: دترمینان ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۲ & ۴\end{bmatrix}$$

حل :

$$|A|=(-۱)(۴)-(۳)(۲)=-۴-۶=-۱۰$$

تمرین برای حل:

۱ : دترمینان ماتریس های زیر را بدست آورید.

الف) $A=\begin{bmatrix}-۳ & ۴\\ -۶ & -۸\end{bmatrix}$ ب) $B=\begin{bmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}$

۲ : معادله ی زیر را حل کنید.

$$\begin{vmatrix}x & ۲-x\\ -۳ & x-۲\end{vmatrix}=۰$$

***

ماتریس کهاد(مینور) یک درایه در ماتریس مربعی

برای هر ماتریس مربعی، ماتریسی که از حذف سطر iام و ستون jام بدست می آید را کهاد درایـه ی a_{ij} نامند و آنرا با M_{ij} نمایش می دهند.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۳ & ۲\\ ۰ & ۵ & -۳\\ ۲ & ۷ & -۴\end{bmatrix}$ در این صورت:

$$M_{۱۱}=\begin{bmatrix}۵ & -۳\\ ۷ & -۴\end{bmatrix} \quad و \quad M_{۲۳}=\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۲ & ۷\end{bmatrix}$$

***

همسازه ی(کوفاکتور) یک درایه در ماتریس مربعی

برای هر ماتریس مربعی همسازه ی درایه ی a_{ij} عددی است که به شکل زیر بدست می آید.

$$A_{ij}=(-۱)^{i+j}|M_{ij}|$$

مثال: همسازه ی درایه ی سطر دوم و ستون سوم ماتریس زیر به صورت زیر است.

$$A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & ۰\\ ۱ & ۱ & -۱\\ ۲ & -۱ & ۰\end{bmatrix}$$

$$A_{۲۳}=(-۱)^{۲+۳}|M_{۲۳}|=(-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix}-۱ & ۲\\ ۲ & -۱\end{vmatrix}=-(۱-۴)=۳$$

***

روش های محاسبه ی دترمینان ماتریس ۳×۳

در این قسمت روش های محاسبه ی دترمینان یک ماتریس ۳×۳ را بیان می کنیم.

الف : محاسبه ی دترمینان ماتریس ۳×۳ به روش بسط

با توجه به درایه های یک سطر(یا یک ستون) دلخواه و کهاد آنها می توان دترمینان یک ماتریس ۳×۳ را محاسبه کرد[۳]. این روش را روش بسط نسبت به یک سطر (یا ستون) می نامند.

فرض کنید: $A=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳}\\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{bmatrix}$ در این صورت:

بسط نسبت به یک سطر دلخواه ($i=۱$ یا $i=۲$ یا $i=۳$) $$|A|=\sum_{j=۱}^{۳}a_{ij}A_{ij}$$

بسط نسبت به یک ستون دلخواه ($j=۱$ یا $j=۲$ یا $j=۳$) $$|A|=\sum_{i=۱}^{۳}a_{ij}A_{ij}$$

---

[۱] – برای هر ماتریس مربعی $n\times n$ نیز به همین شکل عمل می شود.

مثال: بسط نسبت به سطر اول $i=۱$

$$|A| = a_{۱۱}A_{۱۱} + a_{۱۲}A_{۱۲} + a_{۱۳}A_{۱۳}$$

این روش محاسبه ی دترمینان یک ماتریس مربعی را روش بسط نسبت به یک سطر یا ستون یا به اختصار **روش بسط**[۴] می نامند.

تمرین: دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۵ \\ ۱ & ۲ & -۳ \\ -۱ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

حل : کافی است یک سطر یا یک ستون دلخواه را انتخاب نموده و نسبت به آن بسط می دهیم.

مثلاً سطر سوم

$$|A| = (-۱)(-۱)^{۳+۱}\begin{vmatrix} ۲ & ۵ \\ ۲ & -۳ \end{vmatrix} + (۱)(-۱)^{۳+۲}\begin{vmatrix} ۳ & ۵ \\ ۱ & -۳ \end{vmatrix} + (۳)(-۱)^{۳+۳}\begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}$$

$$|A| = (-۱)(۱)(-۶-۱۰) + (۱)(-۱)(-۹-۵) + (۳)(۱)(۶-۲)$$

$$|A| = ۱۶ + ۱۴ + ۱۲ = ۴۲$$

تمرین : دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

حل : به جهت وجود صفر های بیشتر، نسبت به سطر اول بسط می دهیم. لذا:

$$|A| = ۱(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۴ + ۱ = ۵$$

---

[4] . الف : در روش بسط بهتر است سطر یا ستونی را انتخاب کنیم که صفر های بیشتری داشته باشد. ب : محاسبه ی دترمینان های ماتریس مربعی مرتبه ی ۴ و بالاتر نیز به همین شکل انجام می شود.

تمرین برای حل :

۱ : ماتریس زیر را در نظر بگیرید.

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۵ \\ ۱ & ۲ & -۳ \\ -۱ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

الف) دترمینان این ماتریس را به کمک بسط نسبت به یک سطر دلخواه بدست آورید.

ب) دترمینان این ماتریس را به کمک بسط نسبت به یک ستون دلخواه بدست آورید.

۲ : به کمک بسط نسبت به یک سطر یا ستون دلخواه دترمینان ماتریس زیر را بدست آورید.

$$B=\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۱ & b & ۰ \\ ۳ & -۵ & c \end{bmatrix}$$

***

ب : محاسبه ی دترمینان ماتریس ۳×۳ به کمک ویژگی های دترمینان

به کمک ویژگی دترمینان می توان دترمینان یک ماتریس مربعی را محاسبه کرد. برای بیان این روش ابتدا ویژگی های دترمینان را بیان می کنیم.

در محاسبه ی دترمینان یک ماتریس به کمک بسط نسبت به یک سطر یا یک ستون با ویژگی های جالبی برخورد می کنیم.این ویژگی ها بخصوص برای محاسبه ی دترمینان بدون استفاده از بسط بکار گرفته می شوند. این ویژگی ها عبارتند از:

ویژگی اول: دترمینان هر ماتریس بالا مثلثی ، پایین مثلثی و قطری برابر با حاصل ضرب درایه های روی قطر اصلی آن است.

مثلاً:

$$\begin{vmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۱ & b & ۰ \\ ۳ & -۵ & c \end{vmatrix}=abc$$

ویژگی دوم : هرگاه تمام درایه های یک سطر یا یک ستون ماتریس مربعی برابر صفر باشند، دترمینان آن ماتریس صفر است.

مثلاً:

$$\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۵ \\ ۳ & ۰ & ۷ \end{vmatrix} = ۰$$

ویژگی سوم : هرگاه تمام درایه های یک سطر یا یک ستون ماتریس مربعی در عدد ثابت k ضرب شوند.آنگاه دترمینان آن ماتریس k برابر می شود.

مثلاً:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ -۱۰ & ۲۰ & ۵ \\ ۳ & ۹ & ۷ \end{vmatrix} \overset{\frac{۱}{۵}R2 \to R2}{=} ۵ \times \begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ -۲ & ۴ & ۱ \\ ۳ & ۹ & ۷ \end{vmatrix}$$

نتیجه: اگر A یک ماتریس مربعی $n \times n$ باشد. در این صورت: $|rA| = r^n |A|$

ویژگی چهارم : اگر در یک ماتریس مربعی جای دو سطر یا دو ستون را جابجا کنیم، دترمینان آن در عدد (۱-) ضرب می شود.

مثلاً:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ -۱ & ۲ & ۵ \\ ۳ & ۹ & ۷ \end{vmatrix} \overset{R1 \leftrightarrow R3}{=} - \begin{vmatrix} ۳ & ۹ & ۷ \\ -۱ & ۲ & ۵ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{vmatrix}$$

ویژگی پنجم : اگر در یک ماتریس مربعی دو سطر یا دو ستون مساوی باشند، دترمینان آن ماتریس صفر است.

مثلاً:

$$\begin{vmatrix} -۱ & ۳ & ۲ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۹ & ۷ \end{vmatrix} \overset{R1 = R2}{=} ۰$$

ویژگی ششم : اگر در یک ماتریس مربعی یک سطر یا یک ستون ضریبی از یک سطر یا ستون دیگر باشد، دترمینان آن صفر است.

مثلاً:

$$\begin{vmatrix} -۱ & -۳ & ۲ \\ -۱ & -۳ & ۵ \\ ۳ & ۹ & ۷ \end{vmatrix} \overset{۳C1=C2}{=} ۰$$

ویژگی هفتم : اگر در یک ماتریس مربعی مضربی از یک سطر یا یک ستون را به سطر یا ستون دیگر اضافه کنیم،دترمینان آن تغییر نمی کند.

مثلاً:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۵ & ۷ \end{vmatrix} \overset{۳R2+R1\rightarrow R1}{=} \begin{vmatrix} -۲ & ۹ & ۸ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۵ & ۷ \end{vmatrix}$$

ویژگی هشتم : دترمینان هر ماتریس مربعی و دترمینان ترانهاده اش با هم برابرند. $|A^t| = |A|$

مثلاً:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۵ & ۷ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۲ & ۷ \end{vmatrix}$$

ویژگی نهم : دترمینان حاصل ضرب دو ماتریس مربعی هم مرتبه با حاصل ضرب دترمینان های آنها برابر است.

$$|AB| = |A||B|$$

توجه: این ویژگی فقط برای ضرب ماتریس ها برقرار است ولی برای جمع یا دو تفاضل دو ماتریس مربعی هم مرتبه برقرار نمی باشد.یعنی:

$$|A+B| \neq |A| + |B|$$
$$|A-B| \neq |A| - |B|$$

ویژگی دهم : برای هر ماتریس مربعی A داریم:

$$|A^k| = |A|^k$$

ویژگی یازدهم: اگر تمام درایه های یک سطر یا یک ستون به صورت دو یا چند جمله ای باشند،آنگاه دترمینان این ماتریس را می توان به صورت مجموع چند دترمینان نوشت.

مثلاً:
$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

تمرین: بدون بسط دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{vmatrix} -۱ & ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۴ \\ ۲ & ۰ & ۶ \end{vmatrix} = ?$$

حل:

$$\begin{vmatrix} -۱ & ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۴ \\ ۲ & ۰ & ۶ \end{vmatrix} \underset{۲R1+R3\to R3}{\overset{۳R1+R2\to R2}{=}} \begin{vmatrix} -۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۱۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۰ \end{vmatrix} = (-۱)(۱)(۱۰) = -۱۰$$

تمرین : بدون بسط ثابت کنید که $\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{vmatrix} = ۵$

حل:

$$\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{vmatrix} \overset{R۱\leftrightarrow R۳}{=} -\begin{vmatrix} -۱ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} \overset{۲R۱+R۲\to R۲}{=} \begin{vmatrix} -۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = -(-۵) = ۵$$

تمرین: بدون بسط دترمینان تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} \sin^۲ x & ۱ & \cos^۲ x \\ \sin^۲ y & ۱ & \cos^۲ y \\ \sin^۲ z & ۱ & \cos^۲ z \end{vmatrix} = ۰$$

حل:

$$\begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 & \cos^2 x \\ \sin^2 y & 1 & \cos^2 y \\ \sin^2 z & 1 & \cos^2 z \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_1+C_3\to C_3}{=}\begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 & \sin^2 x+\cos^2 x \\ \sin^2 y & 1 & \sin^2 y+\cos^2 y \\ \sin^2 z & 1 & \sin^2 z+\cos^2 z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 & 1 \\ \sin^2 y & 1 & 1 \\ \sin^2 z & 1 & 1 \end{vmatrix}\overset{C_2=C_3}{=}0$$

تمرین برای حل : به کمک ویژگی های دترمینان ، دترمینان ماتریس ها زیر را محاسبه کنید.

الف) $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

ب) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

***

ج : محاسبه ی دترمینان های ماتریس 3×3 به روش ساروس

ابتدا ماتریس را دو بار کنار هم می نویسیم. سپس با توجه به شکل زیر حاصل ضرب های درایه هـای روی خط ها را محاسبه و مطابق شکل جمع و تفریق می کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & - \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$|A|=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})-(a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{22}a_{31})$$

تمرین: دترمینان ماتریس زیر را به کمک قاعده ی ساروس تعیین کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

حل :

$$\begin{matrix} + & + & + & & & - & - & - \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$|A|=(۳)(۲)(۴)+(۵)(۳)(-۱)+(۲)(۴)(۲)-(۳)(۳)(۲)-(۵)(۴)(۴)-(۲)(۲)(-۱)$$

$$|A|=۲۴-۱۵+۱۶-۱۸-۸۰+۸=۶۵$$

تمرین برای حل :

۱ : به روش ساروس دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

۲ : اگر $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$ به کمک قاعده ی ساروس نشان دهید که

$$|A|=۳abc-(a^۳+b^۳+c^۳)$$

۳ : به کمک قاعده ی ساروس ثابت کنید که

$$\begin{vmatrix} ۰ & a & b \\ a & ۰ & c \\ b & c & ۰ \end{vmatrix}=۲abc$$

***

ماتریس الحاقی

متناظر با هر ماتریس مربعی مانند A می توان ماتریس دیگری نظیر کرد. این ماتریس را ماتریس الحاقی می نامند[5]. روش تعیین ماتریس الحاقی با توجه به مرتبه ی ماتریس متفاوت است. در اینجا فقط ماتریس الحاقی ماتریس های مربعی ۲×۲ و ۳×۳ را معرفی می کنیم.

توجه : ماتریس الحاقی ماتریس A را با نماد A^* نمایش می دهند.

***

ماتریس الحاقی ماتریس ماتریس مربعی ۲×۲

ماتریس الحاقی ماتریس مربعی ۲×۲ از تعویض درایه های روی قطر اصلی و قرینه کردن درایه های روی قطر فرعی بدست می آید.

برای مثال ماتریس الحاقی ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ می شود $A^*=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

تمرین : اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$

الف : دترمینان ماتریس A را محاسبه کنید. ب : ماتریس الحاقی A را به دست آورید.

حل :

الف :

$$|A|=(۲)(۵)-(-۲)(۳)=۱۰+۶=۱۶$$

ب :

$$A^*=\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

***

[5] . ترانهاده ی ماتریس همسازه ی هر ماتریس مربعی را ماتریس الحاقی آن می گویند

ماتریس الحاقی ماتریس ماتریس مربعی 3×3

ترانهاده ی ماتریس همسازه ی هر ماتریس مربعی را ماتریس الحاقی آن می گویند و آنرا با A^* نمایش می دهند.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow N=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A^* = N^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

تمرین: ماتریس الحاقی ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

حل:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}|M_{11}|=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=1 \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}|M_{12}|=-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=-6$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}|M_{13}|=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2 \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}|M_{21}|=-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=4$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}|M_{22}|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=3 \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}|M_{23}|=-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}|M_{31}|=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=1 \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}|M_{32}|=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=3$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}|M_{33}|=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=2$$

$$\Rightarrow A^* = N^t = \begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۲۱} & A_{۳۱} \\ A_{۱۲} & A_{۲۲} & A_{۳۲} \\ A_{۱۳} & A_{۲۳} & A_{۳۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۱ \\ -۶ & ۳ & ۳ \\ ۲ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

توجه : این روش برای محاسبه ی ماتریس الحاقی ماتریس مربعی ۲×۲ نیز درست است.

مثال: ماتریس الحاقی ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

حل:

$$A_{۱۱} = (-۱)^{۱+۱} |M_{۱۱}| = d \qquad A_{۱۲} = (-۱)^{۱+۲} |M_{۱۲}| = -c$$

$$A_{۲۱} = (-۱)^{۲+۱} |M_{۲۱}| = -b \qquad A_{۲۲} = (-۱)^{۲+۲} |M_{۲۲}| = a$$

$$\Rightarrow A^* = N^t = \begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۲۱} \\ A_{۱۲} & A_{۲۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

در نتیجه و همانطور قبلاً اشاره شد، ماتریس الحاقی ماتریس مربعی ۲×۲ از تعویض درایه هـای روی قطر اصلی و قرینه کردن درایه های روی قطر فرعی بدست می آید.

تمرین برای حل : ماتریس الحاقی ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

***

ماتریس های معکوس پذیر

دو ماتریس مربعی را معکوس (وارون) همدیگر گویند، هرگاه حاصل ضرب آنها ماتریس واحد باشد.

$$AB = BA = I$$

تمرین: نشان دهید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & -۵ \end{bmatrix}$ وارون ماتریس $B = \begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ است.

حل:

$$AB=\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۲ & -۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵ & ۳\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

$$BA=\begin{bmatrix}۵ & ۳\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۲ & -۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

تمرین برای حل :

نشان دهید که ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۱\\ ۲ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۳\end{bmatrix}$ وارون ماتریس $B=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۹} & \frac{۴}{۹} & \frac{۱}{۹}\\ -\frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۲}{۹} & -\frac{۱}{۹} & \frac{۲}{۹}\end{bmatrix}$ است.

اگر A یک ماتریس مربعی وارون پذیر باشد.در این صورت وارون آن را به شکل $A^{-۱}$ نمایش می دهند. ثابت می شود که

۱ : وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصر بفرد است

۲ : یک ماتریس مربعی وارون پذیر است، اگر و تنها اگر دترمینان آن مخالف صفر باشد.

۳ : برای هر ماتریس مربعی مانند A همواره داریم: $A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\times A^{*}$

تمرین: معکوس ماتریس های زیر را در صورت وجود بدست آورید.

الف) $A=\begin{bmatrix}۵ & ۷\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}$ ب) $B=\begin{bmatrix}۲ & -۳\\ -۴ & ۶\end{bmatrix}$

حل

الف: $A=\begin{bmatrix}۵ & ۷\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}\rightarrow |A|=۲۰-۲۱=-۱\neq ۰ \quad \rightarrow$ لذا ماتریس A معکوس پذیر است.

$$A^{*}=\begin{bmatrix}۴ & -۷\\ -۳ & ۵\end{bmatrix}$$

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|} \times A^* = \frac{۱}{-۱} \times \begin{bmatrix} ۴ & -۷ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ & ۷ \\ ۳ & -۵ \end{bmatrix}$$

ب: $B = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ -۴ & ۶ \end{bmatrix} \rightarrow |B| = ۱۲ - ۱۲ = ۰ \quad \rightarrow$ لذا ماتریس B معکوس پذیر است.

تمرین: معکوس ماتریس زیر را در صورت وجود بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

حل:

$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix} \rightarrow |A| = ۹ \neq ۰$ لذا ماتریس A معکوس پذیر است.

$$A_{۱۱} = (-۱)^{۱+۱} |M_{۱۱}| = \begin{vmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} = ۱ \qquad A_{۱۲} = (-۱)^{۱+۲} |M_{۱۲}| = -\begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۳ \end{vmatrix} = -۶$$

$$A_{۱۳} = (-۱)^{۱+۳} |M_{۱۳}| = \begin{vmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۲ \qquad A_{۲۱} = (-۱)^{۲+۱} |M_{۲۱}| = -\begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} = ۴$$

$$A_{۲۲} = (-۱)^{۲+۲} |M_{۲۲}| = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{vmatrix} = ۳ \qquad A_{۲۳} = (-۱)^{۲+۳} |M_{۲۳}| = -\begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} = -۱$$

$$A_{۳۱} = (-۱)^{۳+۱} |M_{۳۱}| = \begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{vmatrix} = ۱ \qquad A_{۳۲} = (-۱)^{۳+۲} |M_{۳۲}| = -\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix} = ۳$$

$$A_{۳۳} = (-۱)^{۳+۳} |M_{۳۳}| = \begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{vmatrix} = ۲$$

$$\Rightarrow A^* = N^t = \begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۲۱} & A_{۳۱} \\ A_{۱۲} & A_{۲۲} & A_{۳۲} \\ A_{۱۳} & A_{۲۳} & A_{۳۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۱ \\ -۶ & ۳ & ۳ \\ ۲ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|} \times A^* = \frac{۱}{۹} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۱ \\ -۶ & ۳ & ۳ \\ ۲ & -۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۹} & \frac{۴}{۹} & \frac{۱}{۹} \\ -\frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۲}{۹} & -\frac{۱}{۹} & \frac{۲}{۹} \end{bmatrix}$$

تذکر: اگر B و A دو ماتریس مربعی هم مرتبه و معکوس پذیر باشند. در این صورت

$$(AB)^{-۱} = B^{-۱}A^{-۱}$$

تمرین برای حل :

۱ : اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}$ تساوی های زیر را کامل کنید.

ج) $A^{-۱} + B^* + I_۲ =$ ب) $B^* =$ الف) $A^{-۱} =$

۲ : اگر $A = \begin{bmatrix} \log ۵ & \log ۲ \\ \log ۲ & \log ۵ \end{bmatrix}$. نشان دهید که : $|A| = \log^{\frac{۵}{۲}}$

۳ : اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس $(A^{-۱})^۲$ را تعیین کنید.

۴ : $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}$. ثابت کنید که $(AB)^{-۱} = B^{-۱}A^{-۱}$

۵ : اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد.حاصل عبارت های زیر را بیابید.

ب) $A^{-۱} + B^{-۱}$ الف) $(A+B)^{-۱}$

۶ : مقدار m را چنان بیابید که ماتریس زیر وارون پذیر نباشد.

$$A = \begin{bmatrix} ۲m+۱ & ۵ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

۷ : معکوس ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۳ & ۱ & -۲ \end{bmatrix}$ را در صورت وجود بدست آورید.

***

محاسبه ی معکوس یک ماتریس مربعی به کمک اعمال سطری مقدماتی

اعمال زیر را **<u>اعمال سطری مقدماتی</u>** می نامند، می توان این اعمال را روی سطرهای یک ماتریس انجام داد و ماتریس دیگری متناظر با آن به دست آورید.

۱ : ضرب کردن یک سطر ماتریس در یک عدد حقیقی ناصفر

۲ : اضافه کردن یک سطر یا مضربی از آن به طرفین سطری دیگر

۳ : تعویض جای دو سطر در یک ماتریس

اگر ماتریس مربعی A معکوس پذیر باشد.آنرا در کنار ماتریس واحد هم مرتبه ی آن قرار می دهیم، سپس با استفاده از اعمال سطری مقدماتی ماتریس داده شده را به ماتریس واحد تبدیل می کنیم.در صورتی که همین اعمال را به طور همزمان روی ماتریس واحد انجام شوند، حاصل معکوس ماتریس اصلی خواهد بود.

$$[A\,|\,I]\xrightarrow{\text{اعمال سطری مقدماتی}}[I\,|\,A^{-۱}]$$

تمرین: معکوس ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ را در صورت وجود بدست آورید.

حل:

لذا ماتریس معکوس پذیر است. $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} \rightarrow |A| = ۴-۳ = ۱ \neq ۰$

$$[A|I]=\left[\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\3&2&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left[\begin{array}{cc|cc}3&2&0&1\\2&1&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{-2R_2+R_1\to R_1}\left[\begin{array}{cc|cc}-1&0&-2&1\\2&1&1&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_1\to R_1}\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&2&-1\\2&1&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{-2R_1+R_2\to R_2}\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&2&-1\\0&1&-3&2\end{array}\right]=[I|A^{-1}]$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1\\-3&2\end{bmatrix}$$

تمرین: معکوس ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\3&1&-2\end{bmatrix}$ را در صورت وجود بدست آورید.

حل:

لذا ماتریس معکوس پذیر است.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\3&1&-2\end{bmatrix}\to|A|=3\neq 0$$

$$[A|I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\4&5&6&0&1&0\\3&1&-2&0&0&1\end{array}\right]\underset{-3R_1+R_3\to R_3}{\overset{-4R_1+R_2\to R_2}{\longrightarrow}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-3&-6&-4&1&0\\0&-5&-11&-3&0&1\end{array}\right]$$

$$\underset{-\frac{5}{3}R_2+R_3\to R_3}{\overset{-\frac{2}{3}R_2+R_1\to R_1}{\longrightarrow}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&\frac{11}{3}&-\frac{2}{3}&0\\0&-3&-6&-4&1&0\\0&0&-1&\frac{11}{3}&-\frac{5}{3}&1\end{array}\right]$$

$$\underset{-6R_3+R_2\to R_2}{\overset{-R_3+R_1\to R_1}{\longrightarrow}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&-1&-1\\0&-3&0&18&11&-6\\0&0&-1&\frac{11}{3}&-\frac{5}{3}&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-R_3\to R_3]{-\frac{1}{3}R_2\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -\frac{11}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} & \frac{5}{3} & -1 \end{array}\right]=[I\mid A^{-1}]\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -6 & -\frac{11}{3} & 2 \\ -\frac{11}{3} & \frac{5}{3} & -1 \end{bmatrix}$$

تمرین برای حل :

معکوس ماتریس های زیر را در صورت وجود به روش اعمال سطری مقدماتی بدست آورید.

الف) $A=\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

ب) $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

***