فصل اول : تابع

زوج مرتب و حاصلضرب دکارتی :

تعریف: زوج مرتب یک دوتایی به صورت (a,b) می‌باشد که به a مؤلفه یا مختص اول و b مؤلفه یا مختص دوم می‌گویند.

دقت شود اگر در یک زوج مرتب جای مؤلفه‌های اول و دوم را عوض کنیم، آن زوج مرتب تغییر می‌کند یعنی در حالت کلی:

$$(a,b) \neq (b,a)$$

تساوی دو زوج مرتب: دو زوج مرتب (a,b) و (c,d) در صورتی با هم برابر هستند که داشته باشیم:

$$(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases} \rightarrow$$

یعنی مؤلفه‌های اول با هم برابر و مؤلفه‌های دوم نیز با هم برابر باشند

تذکر: یک کاربرد زوج مرتب، استفاده از آن برای نمایش مختصات یک نقطه در صفحه است. نماد $A\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$ را به معنای نقطه‌ای در صفحه در نظر می‌گیریم که طول آن برابر x و عرض آن برابر y است و به (x,y) مختصات نقطه در صفحه گوییم.

مثال: مقدار y و x را چنان بیابید که دو نقطه $(2x+3y, 3x-2y)$ و $(8,-1)$ بر هم منطبق باشند.

حل: چون دو نقطه بر هم منطبق هستند پس باید مؤلفه‌های اول آنها با هم برابر و مؤلفه‌های دوم آنها نیز با هم برابر باشند یعنی:

$$(*)\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 3x-2y=-1 \end{cases}$$

حال برای حل دستگاه فوق معادله اول را در عدد 2 و معادله دوم را در عدد 3 ضرب می‌کنیم که در نتیجه این کار ضرایب متغیر y با هم برابر و مختلف العلامه می‌شوند بنابراین می‌توان آنها را با هم حذف کرد یعنی:

$$\begin{array}{r|l} \times 2 & 2x+3y=8 \\ \times 3 & 3x-2y=-1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 4x+\cancel{6y}=16 \\ 9x-\cancel{6y}=-3 \end{cases}$$

$$13x=16-3$$

$$\Rightarrow 13x=13$$

$$\Rightarrow x=\frac{13}{13}=1 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

در ادامه در دستگاه معادلات $(*)$ به جای x، عبارت $x=1$ را جایگزین کرده و متغیر y را محاسبه می‌کنیم، دقت شود که فرقی ندارد در کدام معادله $x=1$ را جایگزین می‌کنیم.

حال معادله اول را انتخاب می‌کنیم و به جای متغیر x مقدار 1 را جایگزین می‌کنیم :

$$2x+3y=8 \xrightarrow{x=1} 2(1)+3y=8 \Rightarrow 3y=8-2 \Rightarrow 3y=6 \Rightarrow y=\frac{6}{3}=2$$

$$\Rightarrow \boxed{y=2}$$

مثال : x و y را طوری بیابید که $(x^2-y^2, 2)=(16, x-y)$

حل : برای حل این مثال به اتحاد مزدوج نیاز داریم، یادآوری می‌کنیم که $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ بیانگر اتحاد مزدوج می‌باشد.

$$(x^2-y^2, 2)=(16, x-y) \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=16 \\ x-y=2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \begin{cases} (x-y)(x+y)=16 \\ x-y=2 \quad (*) \end{cases}$$

معادله $(*)$ را در معادله بالا جایگذاری می‌کنیم یعنی به جای عبارت $(x-y)$ در معادله اول مقدار 2 را قرار می‌دهیم بنابراین داریم

$$2(x+y)=16 \Rightarrow (x+y)=8 \quad (*)(*)$$

حال معادله $(*)$ و $(*)(*)$ را در یک دستگاه قرار داده و یک دستگاه دو معادله و دو مجهول می‌سازیم و از حل آن مقادیر y و x را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{cases} x+\cancel{y}=8 \\ x-\cancel{y}=2 \\ \hline 2x=10 \Rightarrow x=\frac{10}{2}=5 \Rightarrow \boxed{x=5} \end{cases}$$

مانند مثال قبل مقدار $x=5$ را در یکی از معادلات جایگذاری کرده و مقدار y را محاسبه می‌کنیم.

$$x+y=8 \Rightarrow 5+y=8 \Rightarrow y=8-5 \Rightarrow \boxed{y=3}$$

حاصلضرب دکارتی دو مجموعه : حاصلضرب دکارتی دو مجموعه A و B را که با نماد $A\times B$ نشان می‌دهیم، مجموعه‌ای است که آن را به صورت روبه‌رو تعریف می‌کنیم :

$$A\times B=\{(x,y) \mid x\in A, y\in B\}$$

به عبارت دیگر $A\times B$، مجموعه تمام زوج‌های مرتبی است که مؤلفه اول آنها در مجموعه A و مؤلفه دوم آنها در مجموعه B قرار دارد.

$(*)$ نکته :

$$A\times A=\{(x,y) \mid x\in A, y\in A\}=A^2$$

رابطه:

تعریف: فرض کنید A و B دو مجموعه باشند، هر زیرمجموعه از مجموعه $A \times B$ را یک رابطه از A به B می‌نامند.
اگر f یک رابطه از A به B باشد آنگاه $f \subseteq A \times B$.

تذکر: اگر $(x,y) \in f$ باشد، گوییم f عنصر x را به عنصر y نسبت می‌دهد.

دامنه و برد یک رابطه:

دامنه یک رابطه عبارت است از مجموعه همه مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب متعلق به آن رابطه و برد یک رابطه عبارت است از مجموعه مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب متعلق به آن رابطه.

تذکر: دامنه یک رابطه را با نماد D و برد یک رابطه را با نماد R نشان می‌دهند.

مثال: دامنه و برد هر یک از رابطه‌های زیر را تعیین کنید.

1) $f = \{(1,2),(3,4),(0,3),(4,-1),(2,7)\}$

حل: $D_f = \{1,3,0,4,2\}$ $\quad R_f = \{2,4,3,-1,7\}$

نمودار رابطه: هر رابطه را می‌توان به صورت نمودارهای پیکانی و دکارتی نشان داد، فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی باشند و f یک رابطه از A به B باشد:

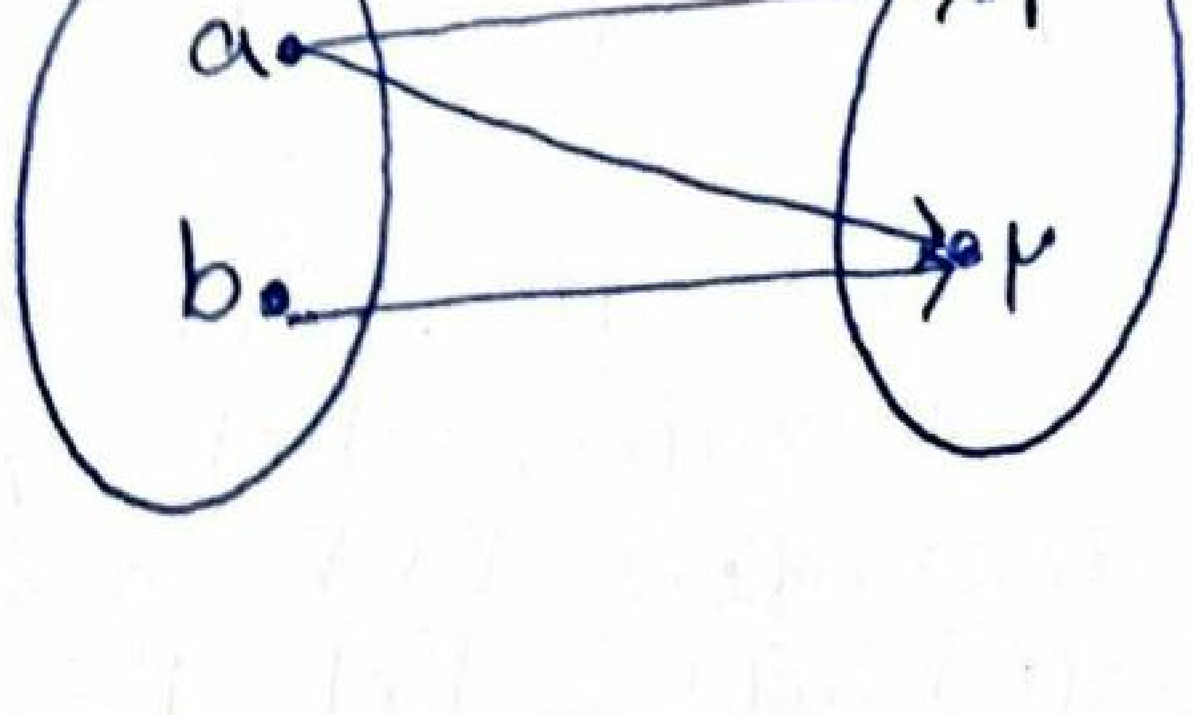
الف) نمودار دکارتی f، مجموعه تمام نقاط (x,y) از صفحه است که $(x,y) \in f$.

ب) نمودار پیکانی f، اعضای دامنه و برد را در دو شکل بسته (مثل دایره) قرار می‌دهیم و سپس با فلش مؤلفه اول هر زوج را به مؤلفه دوم آن نسبت می‌دهیم.

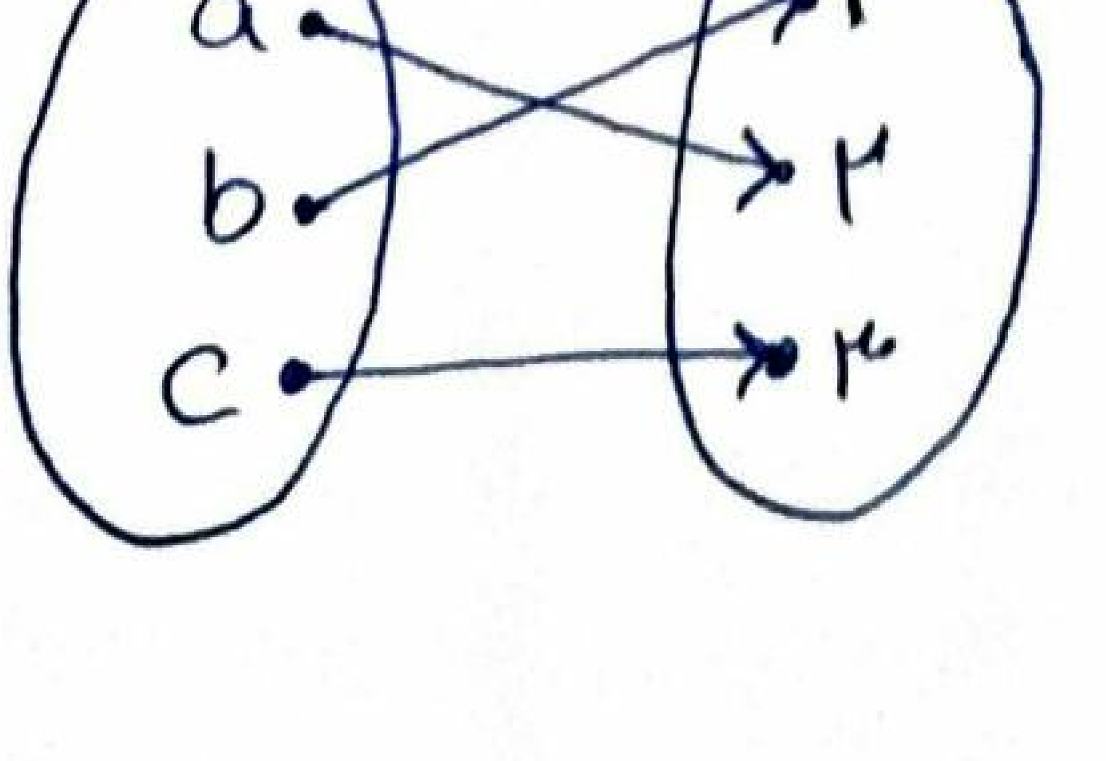
مثال: نمودار پیکانی هر یک را نمایش دهید.

الف) $f = \{(a,1),(b,2),(a,2)\}$ $\qquad$ ب) $g = \{(a,2),(b,1),(c,3)\}$

حل الف)



حل ب)



مثال: اگر $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,5\}$ مطلوب است محاسبه:

الف) $A\times B$ ب) $B\times A$ ج) $A\times A$ د) $B\times B$

حل الف) $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}$

$\rightarrow A\times B=\{(1,4)(1,5)(2,4)(2,5)(3,4)(3,5)\}$

حل ب) $B\times A=\{(x,y)\mid x\in B, y\in A\}$

$\rightarrow B\times A=\{(4,1)(4,2)(4,3)(5,1)(5,2)(5,3)\}$

حل ج) $A\times A=\{(x,y)\mid x\in A, y\in A\}$

$\rightarrow A\times A=\{(1,1)(1,2)(1,3)(2,1)(2,2)(2,3)(3,1)(3,2)(3,3)\}$

حل د) $B\times B=\{(x,y)\mid x\in B, y\in B\}$

$\rightarrow B\times B=\{(4,4)(4,5)(5,4)(5,5)\}$

* نتیجه: با توجه به قسمت های «الف» و «ب» مثال فوق به این نتیجه می رسیم که چون در حالت کلی $(x,y)\neq(y,x)$ است، بنابراین $A\times B\neq B\times A$، اما تعداد اعضای $A\times B$ و $B\times A$ برابر هستند. که همانطور که در مثال فوق مشاهده می شود تعداد اعضای $A\times B$، ۶ و تعداد اعضای $B\times A$ نیز ۶ می باشد.

نکته: اگر مجموعه A دارای k عضو و مجموعه B دارای m عضو باشد، آنگاه $A\times B$ دارای mk عضو می باشد، دقت شود تعداد اعضای $A\times B$ را با نماد $n(A\times B)$ نمایش می دهند.

مثال: اگر $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{3,4\}$، آنگاه تعداد اعضای $A\times B$ و $B\times A$، A^2، B^2 را بدست آورید.

حل: $n(A)=$ تعداد اعضای A $=3$

$n(B)=$ B " " $=2$

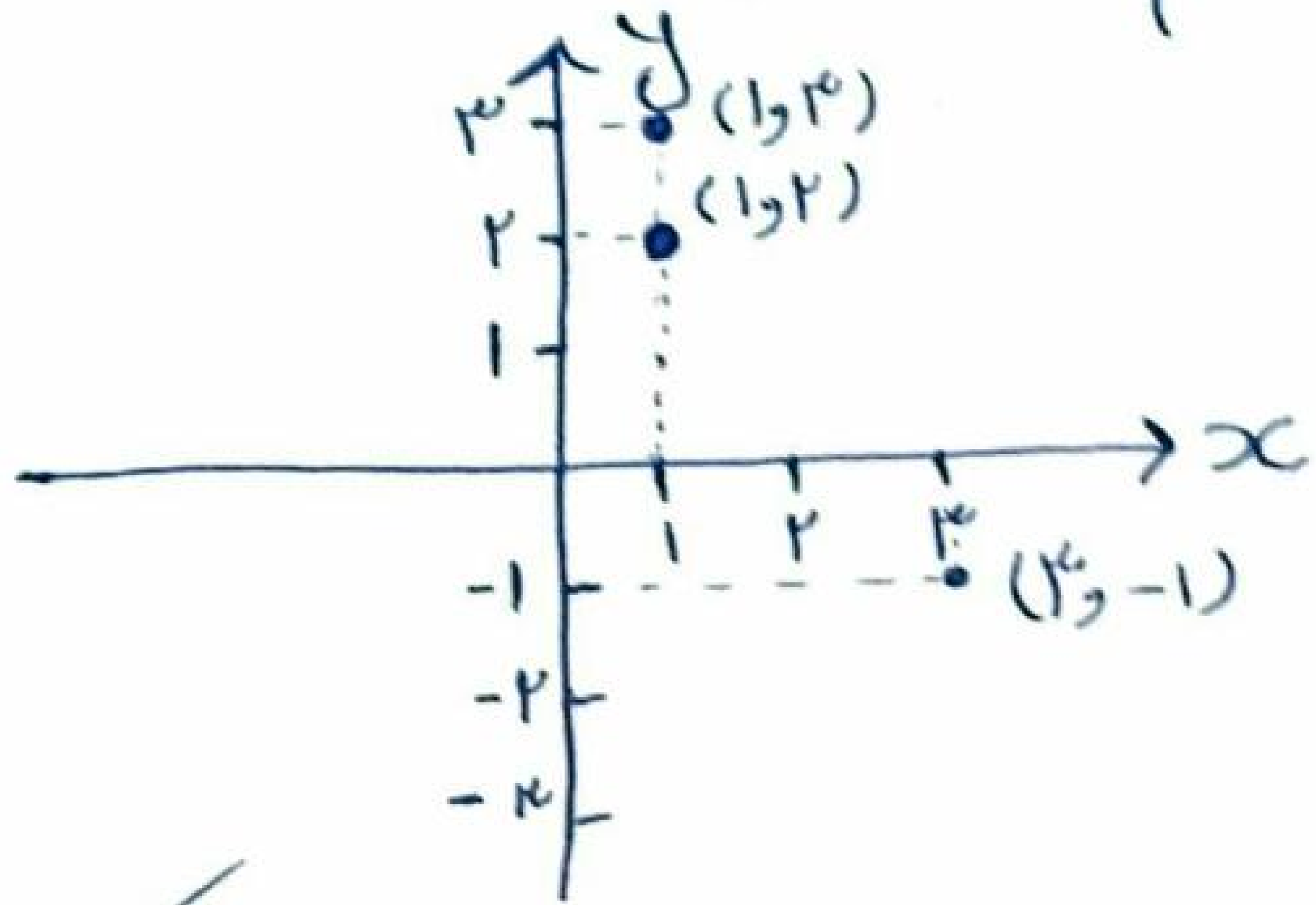
$\Leftarrow n(A\times B)=n(A)\times n(B)=3\times 2=6$

$n(B\times A)=n(B)\times n(A)=2\times 3=6$

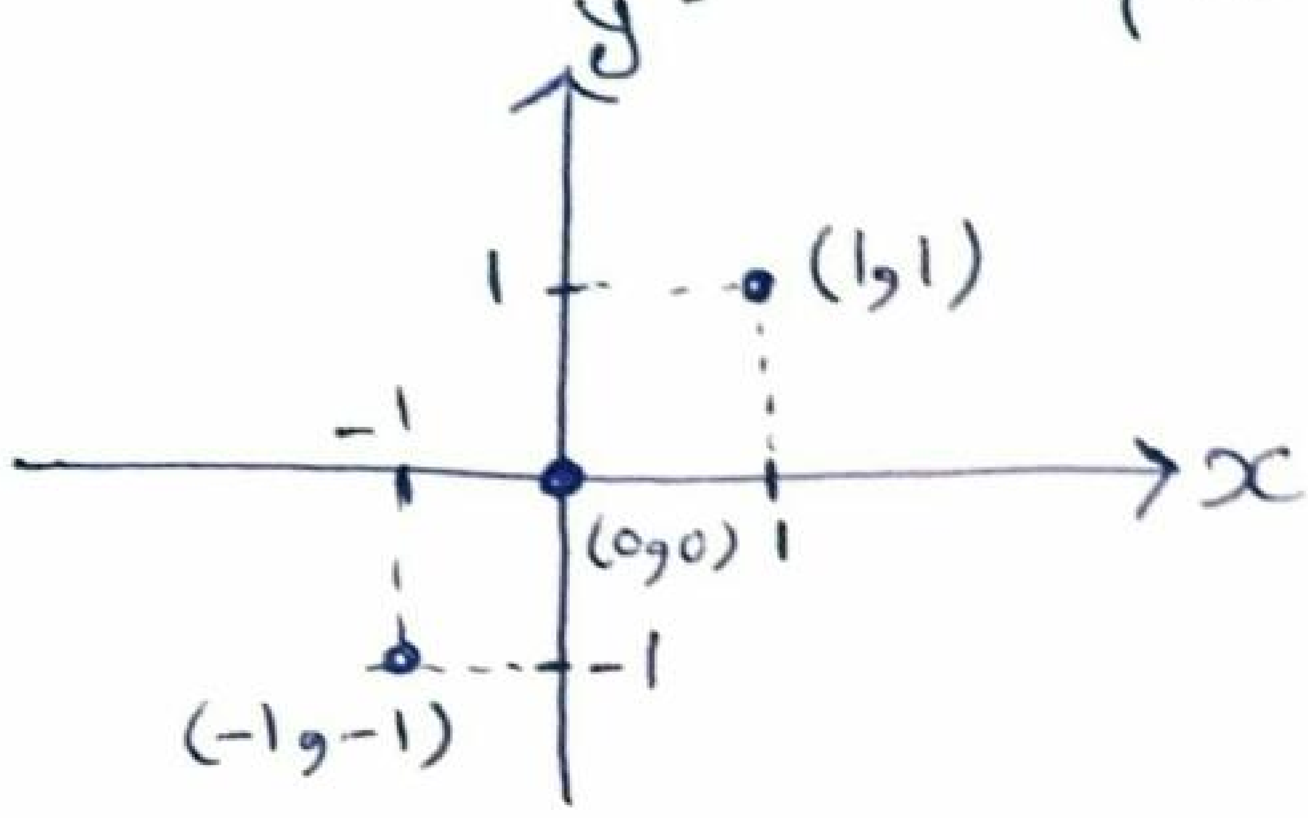
$n(A^2)=n(A)\times n(A)=3\times 3=9$

$n(B^2)=n(B)\times n(B)=2\times 2=4$

مثال: فرض کنید $f=\{(1,2),(1,3),(3,-1)\}$ ، در اینصورت نمودار دکارتی f را رسم کنید.



مثال: فرض کنید $f=\{(0,0),(1,1),(-1,-1)\}$ ، در اینصورت نمودار دکارتی f را رسم کنید.



رابطه وارون یا رابطه معکوس: فرض کنید f یک رابطه از A به B باشد. وارون (معکوس) f که با f^{-1} نشان داده می‌شود رابطه‌ای است از B به A که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f^{-1}=\{(x,y)\mid(y,x)\in f\}$$

تذکر: هرگاه در یک رابطه جای مؤلفه‌های اول و دوم (یعنی دامنه و برد) را با هم عوض کنیم رابطه وارون حاصل می‌شود.

مثال: وارون هر یک از رابطه‌های زیر را بنویسید.

الف) $f=\{(1,2)(1,3)(3,-1)(2,2)\}$ ب) $g=\{(1,2)(3,7)(3,-1)\}$

حل الف) $f^{-1}=\{(2,1)(3,1)(-1,3)(2,2)\}$ حل ب) $g^{-1}=\{(2,1)(7,3)(-1,3)\}$

تابع: تعریف: فرض کنید A و B دو مجموعه باشند، رابطه f از A به B را یک تابع از A به B گوییم هرگاه در دو شرط زیر صدق کند:

الف) برای هر عنصر $x\in A$ ، عنصری مانند $y\in B$ وجود داشته باشد بطوریکه $(x,y)\in f$. به عبارت دیگر f باید هر یک از عناصر A را به عنصری از B نسبت بدهد.

ب) f هر یک از عناصر A را فقط به یک عنصر از B نسبت دهد، یعنی هیچ دو زوج مرتبی دارای مؤلفه‌های اول برابر نباشند و اگر $(x,y)\in f$ و $(x,z)\in f \Rightarrow z=y$ یعنی اگر دو زوج مرتب باشند که مؤلفه‌های اول برابر داشته باشند باید مؤلفه‌های دوم هم برابر باشند.

تذکر: معمولاً به جای $(x,y)\in f$ می‌نویسیم $y=f(x)$.

مثال: مشخص کنید کدام یک از رابطه‌های زیر یک تابع است.

الف) $f=\{(1,2),(3,4),(5,7),(9,0)\}\rightarrow$ حل: تابع است زیرا هیچ دو زوج مرتبی دارای مؤلفه اول برابر نیستند.

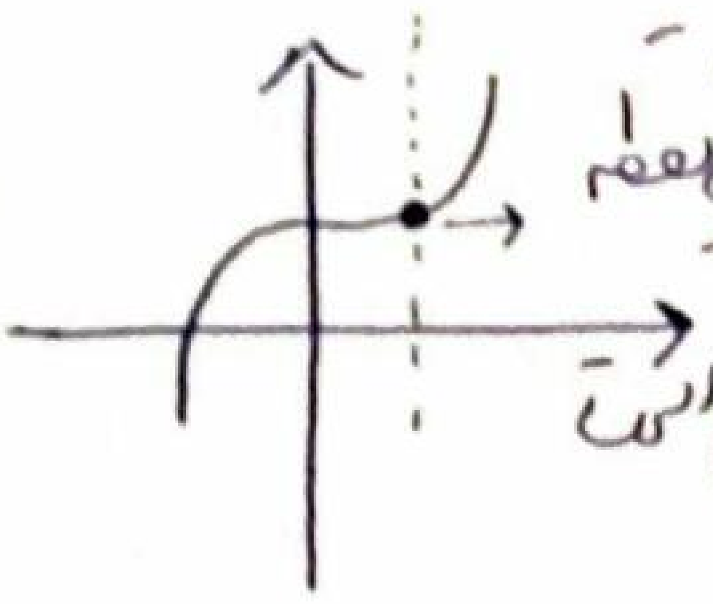
ب) $g=\{(-1,4),(7,3),(-1,2),(5,8)\}\rightarrow$ حل: تابع نیست زیرا دو زوج مرتب که با $\equiv$ نشان داده شده اند دارای مؤلفه اول برابر هستند.

ج) $f_1=\{(1,5),(9,8),(1,5),(7,0)\}\rightarrow$ حل: تابع است زیرا دو زوج مرتب $(1,5)$ درست است که دارای مؤلفه‌های اول برابر هستند، اما مؤلفه‌های دوم آنها نیز برابر هستند.

نکته: برای تشخیص تابع از روی نمودار، خطی به موازات محور yها رسم می‌کنیم اگر نمودار را فقط در یک نقطه قطع کند گوییم نمودار، نمودار یک تابع است.

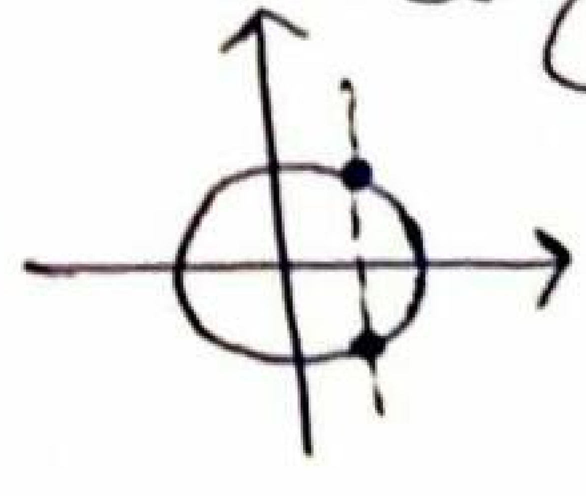
مثال: کدام یک نمودار یک تابع است.

الف)



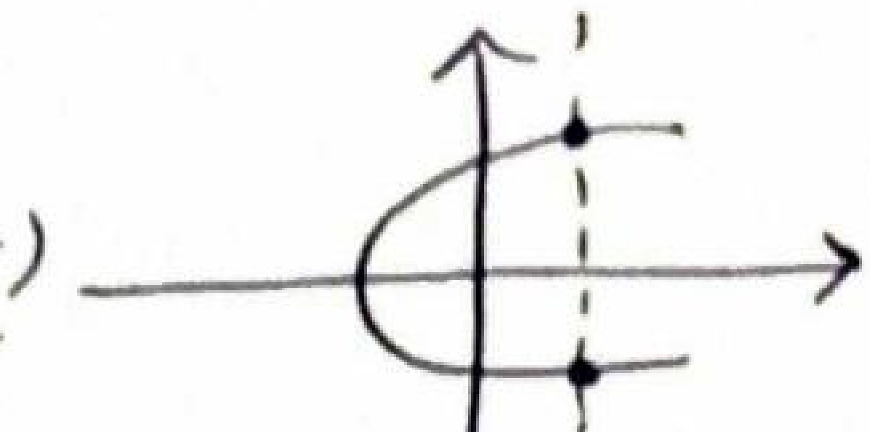
فقط یک نقطه
پس تابع است

ب)



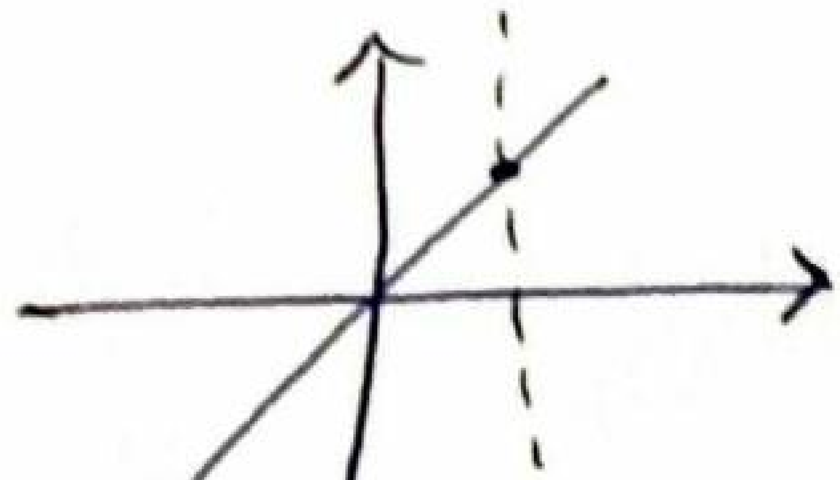
بیشتر از یک نقطه
پس تابع نیست

ج)



بیش از یک نقطه
پس تابع نیست

د)



فقط یک نقطه
پس تابع است.

مقدار تابع در یک نقطه: می‌توان به متغیر x در تابع مقدار داد و در ازای آن مقداری برای متغیر y با توجه به ضابطه تابع بدست آورد.

مثال: اگر $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ آنگاه مقدار $f(0)$ و $f(2)$ و $f(-1)$ را حساب کنید.

حل: $f(0)=\frac{0+1}{0-1}=\frac{1}{-1}=-1$ ، $f(1)=\frac{2+1}{2-1}=\frac{3}{1}=3$ و $f(-1)=\frac{-1+1}{-1-1}=\frac{0}{-2}=0$

از طرفی $f(\sqrt{x})=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\rightarrow$ به جای x، $\sqrt{x}$ قرار دادیم و $f(x^2)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ که به جای x، x^2 قرار دادیم.