احتمال شرطی

هنگامی که دو پیشامد به یکدیگر وابسته باشند و وقوع یا عدم وقوع یکی بر وقوع یا عدم وقوع دیگری تأثیری می‌گذارد، در این صورت وقوع یکی را پس از این که دیگری به وقوع پیوسته باشد، محاسبه می‌نمایند چنین احتمالی را احتمال شرطی می‌گویند.

وقوع حادثه A ، به شرط آن‌که بدانیم B رخ داده است را به صورت $P(A|B)$ نشان داده و از فرمول زیر بدست می‌آید:

احتمال A به شرط B ؛ $P(B)\neq 0$؛ $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

همچنین می‌توان احتمال وقوع حادثه B را به شرط وقوع حادثه A به صورت زیر بیان کرد:

احتمال B به شرط A ؛ $P(A)\neq 0$؛ $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

به شکل زیر توجه کنید:

نکته : در صورتی که حوادث A و B **ناسازگار، وابسته،** یا **مستقل** باشند به نتایج زیر می‌رسیم:

$$P(A|B)=\begin{cases} =0 & \text{A , B ناسازگار؛} \\ =\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} & \text{A , B وابسته؛} \\ P(A) & \text{A , B مستقل؛} \end{cases}$$

$$P(B|A)=\begin{cases} =0 & \text{A , B ناسازگار؛} \\ =\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} & \text{A , B وابسته ؛} \\ =P(B) & \text{A , B مستقل؛} \end{cases}$$

نکته : مکمل احتمال وقوع حادثه A به شرط وقوع حادثه B عبارتست از:

$$P(A'|B)=1-P(A|B)$$

مثال ۱: یک تاس را پرتاب می‌کنیم، احتمال آن را حساب کنید که عدد 6 رخ دهدبه شرط آن که می‌دانیم عدد بزرگتر از 4 رخ داده است.

حل :

فضای نمونه: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

پیشامد A: $A = \{6\} \longrightarrow P(A) = \frac{1}{6}$

پیشامد B: $B = \{5, 6\} \longrightarrow P(B) = \frac{2}{6}$

$$A \cap B = \{6\} \longrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}} = \frac{1}{2}$$

مثال ۲: اگر $P(A) = 0.30$ و $P(B) = 0.50$ و $P(A|B) = 0.30$ باشد. می‌توان گفت A و B هر دو:

۱) مستقل ۲) ناسازگار ۳) وابسته ۴) شرطی‌اند

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

چون $P(A|B) = P(A) \Leftarrow$ B, A مستقل هستند.

مثال ۳: اگر $P(A) = 0.3$ و $P(B) = 0.7$ و $P(A|B) = 0$ باشند. می‌توان گفت A و B هردو :

۱) مستقل ۲) ناسازگار ۳) وابسته ۴) شرطی‌اند.

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

چون $P(A|B) = 0 \Leftarrow P(A \cap B) = 0 \Leftarrow$ B, A ناسازگار هستند.

مثال ۴: اگر $P(A) = 0.3$ و $P(B) = 0.7$ و $P(A|B) = 0.1$ باشد می‌توان گفت A و B هر دو:

۱) مستقل ۲) ناسازگار ۳) وابسته ۴) مکمل

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

چون $P(A|B) \neq P(A)$ پس A و B مستقل نمی‌باشند و همچنین $P(A|B) \neq 0$ پس A و B ناسازگار نیز نمی‌باشند. بنابراین A و B دو حادثه وابسته می‌باشند.

مثال ۵: اگر $P(A) = 0.4$ و $P(B) = 0.6$ و $P(B|A) = 0.1$ باشد آن‌گاه $P(A|B)$ کدام است؟

۱) 0.0153 ۲) 0.04 ۳) 0.05 ۴) 0.067

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.04}{0.6}=0.067$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A\cap B)=0.1\times 0.4=0.04$$

مثال۶: اگر $P(A)=0.5$ و $P(B)=0.4$ و $P(A\mid B)=0.1$ باشد آن‌گاه $P(A\cup B)$ کدام است؟

۱) 0.75 ۲) 0.86 ۳) 0.8 ۴) 0.9

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

برای محاسبهٔ $P(A\cup B)$ به $P(A\cap B)$ نیاز است، بنابراین:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.5+0.4-0.04=0.86$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B)=P(A|B).P(B) \Rightarrow P(A\cap B)=0.1\times 0.4=0.04$$

مثال۷: اگر $P(A)=\frac{1}{5}$ و $P(B)=\frac{1}{2}$ و $P(A|B)=\frac{1}{4}$ باشد، $P(A'\cup B')$ کدام است؟ (مدیریت ۷۳)

۱) $\frac{19}{20}$ ۲) $\frac{7}{8}$ ۳) $\frac{21}{20}$ ۴) $\frac{3}{8}$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

برای محاسبهٔ $P(A'\cup B')$ ابتدا نیاز به محاسبهٔ $P(A\cap B)$ می‌باشد بنابراین:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B)=P(A|B).P(B)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$P(A'\cup B')=P(A\cap B)'=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

مثال۸: اگر برای دو پیشامد A و B داشته باشیم $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(A|B)=\frac{1}{3}$ و $P(B|A')=\frac{1}{4}$ مقدار $P(B)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{16}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{3}\times P(B) \qquad (I)$$

$$P(B|A')=\frac{P(A'\cap B)}{P(A')} \Rightarrow P(A'\cap B)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8} \qquad (II)$$

می‌دانیم: $P(B)=P(A\cap B)+P(A'\cap B)\xrightarrow{I\,,\,II}P(B)=\frac{1}{3}P(B)+\frac{1}{8} \Rightarrow \boxed{P(B)=\frac{3}{16}}$

مثال۹: با فرض آن‌که احتمال آمدن برف در امروز 0.2 و فردا 0.22 باشد. احتمال برف آمدن فردا به شرط آن که امروز برف بیاید، 0.7 است. احتمال برف نیامدن فردا به شرط آن‌که امروز برف نیاید، چقدر است؟

۱) 0.3   ۲) 0.72   ۳) 0.78   ۴) 0.9

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

برف آمدن امروز : پیشامد A $\longrightarrow P(A)=0.2 \;\Rightarrow\; P(A')=1-P(A)=1-0.2=0.8$

برف آمدن فردا : پیشامد B $\longrightarrow P(B)=0.22$

$$P(B|A)=0.7 \longrightarrow P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \rightarrow P(A\cap B)=0.7\times 0.2=0.14$$

$$P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)=1-\left[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right]$$
$$=1-\left[0.2+0.22-0.14\right]=0.72$$

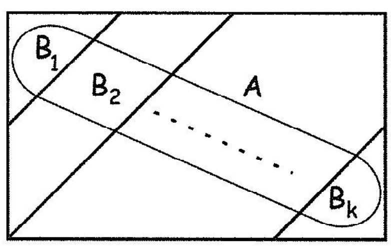
$$P(B'|A')=\frac{P(A'\cap B')}{P(A')}=\frac{0.72}{0.8}=0.9$$

احتمال متوسط

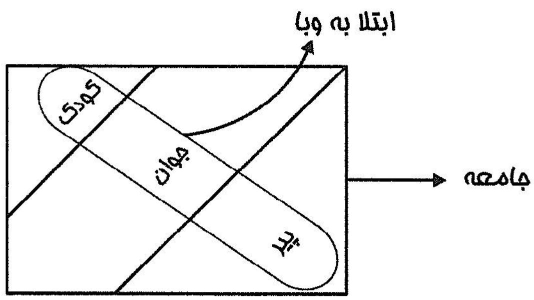
هرگاه حادثه A در نتیجه وقوع هر یک از حوادث B_1، B_2، ....B_k بتواند اتفاق بیفتد آن‌گاه وقوع حادثه A به طور متوسط به شرح زیر بررسی می‌شود.

$$P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+\dots+(A\cap B_k)=\sum_{i=1}^{k}P(A\cap B_i)$$
$$P(A)=\sum_{i=1}^{k}P(B_i)P(A|B_i)$$

به شکل زیر توجه کنید:



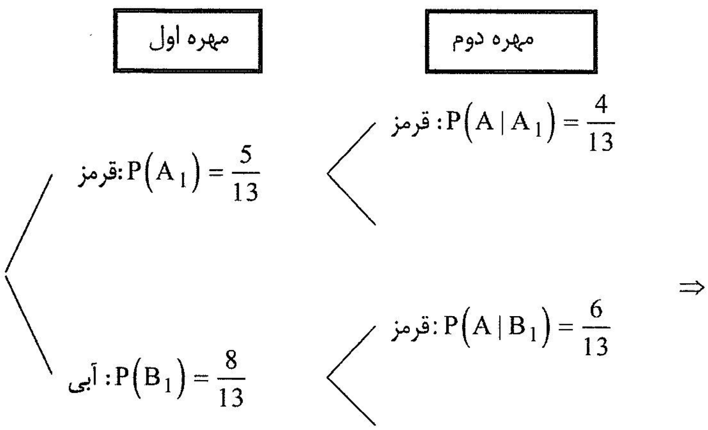
افراد یک جامعه به کودک، جوان و پیر تقسیم می‌شوند، فرض کنید که بیماری وبا در این جامعه شایع شده باشد، اگر بخواهیم احتمال مبتلایان به میکروب وبا را محاسبه کنیم چون این بیماری در کل جامعه پخش شده است، خواهیم داشت:



P (ابتلا به وبا) = P (ابتلا به وبا **و** کودک) +P (ابتلا به وبا **و** جوان) +P (ابتلا به وبا **و**پیر)

مثال ۱: ظرفی حاوی 5 مهره قرمز و 8 مهره آبی است. به طور تصادفی مهره‌ای از ظرف بیرون می‌آوریم و به جای آن مهره‌ای به رنگ دیگر داخل ظرف می‌اندازیم و سپس مهره دوم را از ظرف بیرون می‌آوریم، احتمال آن‌که مهره دوم قرمز باشد؟

حل : بهتر است که از نمودار درختی استفاده نمائیم:



P (مهر دوم قرمز) = P (اولی قرمز و دومی قرمز) + P (اولی آبی و دومی قرمز)

$$P(A)=P(A_1)P(A|A_1)+P(B_1)P(A|B_1)$$

$$P(A)=\frac{5}{13}\times\frac{4}{13}+\frac{8}{13}\times\frac{6}{13}=\frac{68}{169}$$

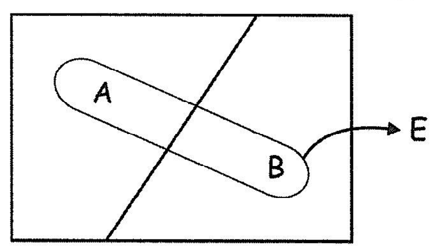
مثال ۲: اگر $P(A)=0.2$ و $P(B)=0.4$ و $P(E|A)=P(E|B)=0.1$ مطلوبست محاسبه $P(E)$؟(مدیریت ۷۸)

۱) 0.2 ۲) 0.1 ۳) 0.06 ۴) 0.7

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$P(E)=\overbrace{P(A)\times P(E|A)}^{P(A\cap E)}+\overbrace{P(B)\times P(E|B)}^{P(B\cap E)}$$

$$P(E)=0.2\times0.1+0.4\times0.1=0.02+0.04=0.06$$



مثال ۳: اگر $P(A)=0.3$ و $P(B)=0.4$ و $P(E|A)=0.1$ و $P(E^c|B)=0.8$ مطلوبست $P(E)$ ؟

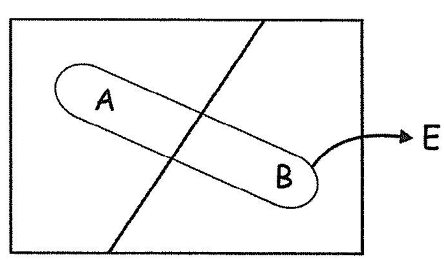
۱) 0.11 ۲) 0.18 ۳) 0.3 ۴) 0.35

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$P(E)=\overbrace{P(A)\times P(E|A)}^{P(A\cap E)}+\overbrace{P(B)\times P(E|B)}^{P(A\cap B)}$$

$$P(E|B)=1-P(E^c|B)=1-0.8=0.2$$

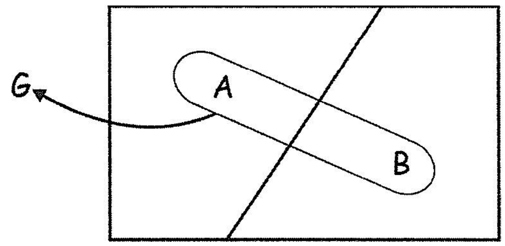
$$P(E)=0.3\times0.1+0.4\times0.2=0.03+0.08=0.11$$



مثال۴: اگر $P(A) = P(B) = 0.4$ و $P(G \mid B) = P(G \mid A) = 0.1$ مقدار $P(G)$ چقدر است؟

۱) 0.08 ۲) 0.21 ۳) 0.51 ۴) 0.9

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.



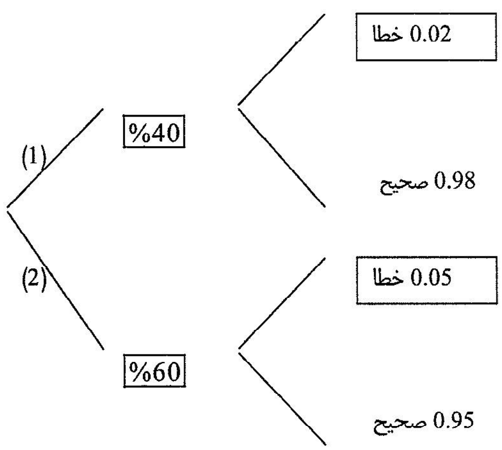
$$P(G) = \overbrace{P(A) \times P(G|A)}^{P(G \cap A)} + \overbrace{P(B) \times P(G|B)}^{P(G \cap B)}$$

$$P(G) = 0.4 \times 0.1 + 0.4 \times 0.1 = 0.04 + 0.04 = 0.08$$

مثال۵: دو تلفنچی شماره 1 و شماره 2 به ترتیب 40% و 60% تلفن‌های شرکت را وصل می‌کنند، تلفنچی شماره 1 در 0.02 موارد تلفنچی شماره 2 در 0.05 موارد دچار خطا می‌شوند چند درصد تلفن‌های شرکت اشتباهاً وصل شده‌اند؟

۱) %2.7 ۲) %3.8 ۳) %7 ۴) %1.07

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

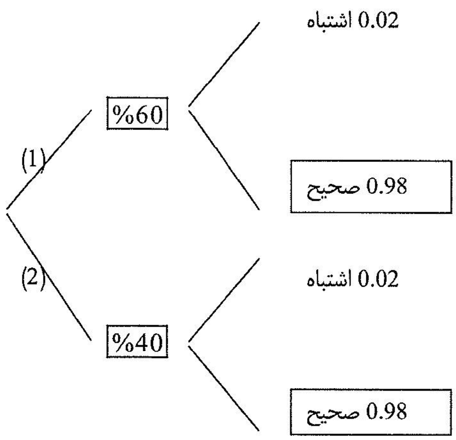


$\Rightarrow P\,(\text{خطا}) = 0.4\times0.02+0.6\times0.05=0.038=\%3.8$

مثال۶: حسابدار رتبه یک، 0.60 حساب‌های یک شرکت را ثبت می‌کند و حسابدار رتبه دو، 0.40 حساب‌های یک شرکت را ثبت می‌کند. هر یک از آن‌ها در 0.02 موارد در، ثبت حساب‌های خود دچار اشتباه می‌شوند. احتمال آن‌که حساب‌های ماه گذشته شرکت درست ثبت شده باشند، چقدر است؟

۱) 0.98 ۲) 0.80 ۳) 0.66 ۴) 0.96

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.



$\Rightarrow P$ (صحیح) $= 0.60\times0.98+0.40\times0.98=0.98$

○ قضیه بیز

اگر $A_1 , A_2 , \ldots , A_k$ **گروه کامل حوادث** بوده و E حادثه‌ای باشد که روی حوادث فوق اتفاق بیافتد آن‌گاه احتمال شرطی وقوع A_k به شرط آن که بدانیم حادثه E اتفاق افتاده است، تحت عنوان قضیه بیز مطرح می‌شود.

اگر فضای نمونه‌ای توسط پیشامدهای $A_1 , A_2 , \ldots , A_n$ افراز شود یعنی:

$$\begin{cases} A_i \cap A_j = \phi \qquad i \neq j \\ \bigcup_{i=1}^{n} = S \\ A_i \neq \phi \end{cases}$$

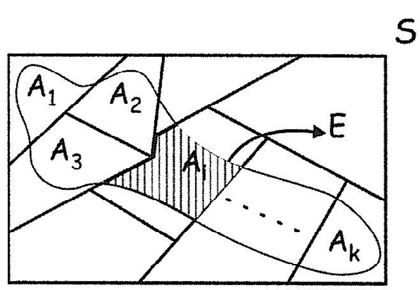
و E یک پیشامد در این فضا باشد، خواهیم داشت:

$$\boxed{P(A_k|E)=\frac{P(A_k)P(E|A_k)}{P(E)} \qquad ;k=1,2,\ldots,n}$$

توجه کنید که $P(E)$، احتمال متوسط است.

$$P(E)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(E|A_k)$$

به شکل زیر توجه کنید:



مثال ۱: احتمال وقوع سه پیشامد A ، B و C به ترتیب برابر است با 0.35 ، 0.45 و 0.20 احتمال وقوع پیشامد X به شرط وقوع پیشامد A ، 0.8 است، احتمال وقوع پیشامد X به شرط وقوع پیشامد B ، 0.3 است و احتمال وقوع پیشامد X به شرط وقوع پیشامد C ، 0.65 است $P(A \mid X)$ کدام است؟

حل : ابتدا باید $P(X)$ (احتمال متوسط) را حساب کنیم:

$$\text{احتمال متوسط} = P(X) = P(A)P(X|A) + P(B)P(X|B) + P(C)P(X|C)$$

$$P(X) = (0.35)(0.8) + (0.45)(0.3) + (0.20)(0.65) = 0.545$$

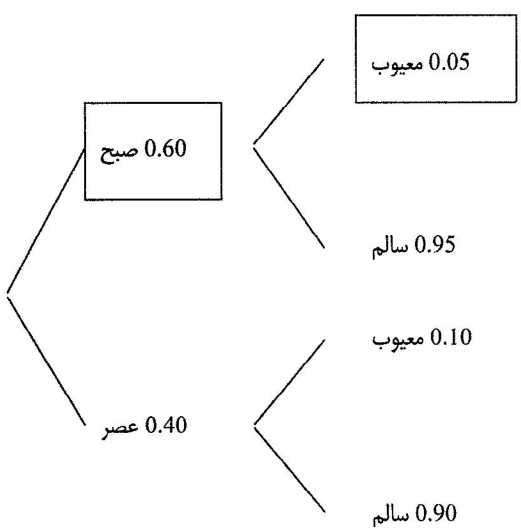
بنابراین:

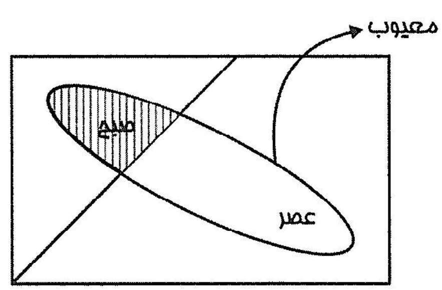
$$P(A \mid X) = \frac{P(A)P(X|A)}{P(X)} = \frac{(0.35)(0.8)}{0.545} = \frac{0.28}{0.545} \simeq 0.51$$

مثال ۲: در کارخانه‌ای 0.60 تولیدات توسط شیفت صبح و 0.40 تولیدات توسط شیفت عصر تولید می‌شود. 5 درصد تولیدات شیفت صبح و 10 درصد تولیدات شیفت عصر معیوبند اگر محصولی که به تصادف انتخاب شده است، معیوب تشخیص داده شود، احتمال آن‌که این محصول توسط شیفت صبح تولید شده باشد، چیست؟

۱) $\frac{1}{7}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{3}{7}$

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.





$$P(\text{صبح} \mid \text{معیوب}) = \frac{P(\text{صبح})\,P(\text{معیوب} \mid \text{صبح})}{\underbrace{P(\text{صبح})\,P(\text{معیوب} \mid \text{صبح}) + P(\text{عصر})\,P(\text{معیوب} \mid \text{عصر})}_{P(\text{معیوب})}}$$

$$P(\text{صبح} \mid \text{معیوب}) = \frac{(0.60)(0.05)}{(0.60)(0.05) + (0.40)(0.10)} = \frac{0.03}{0.03 + 0.04} = \frac{3}{7}$$

مثال۳: اطلاعات زیر داده شده است:

$$P(B_1) = 0.2\ ,\ P(A|B_1) = 0.01$$
$$P(B_2) = 0.3\ ,\ P(A|B_2) = 0.02$$
$$P(B_3) = 0.5\ ,\ P(A|B_3) = 0.05$$

مطلوبست احتمال $P(B_2|A)$ ؟

۱) $\frac{2}{33}$ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $\frac{2}{11}$ ۴) $\frac{3}{4}$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

بنابرقضیه بیز داریم:

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2).P(A|B_2)}{P(B_1).P(A|B_1) + P(B_2).P(A|B_2) + P(B_3).P(A|B_3)}$$

$$P(B_2|A) = \frac{(0.3)(0.02)}{(0.2)(0.01) + (0.3)(0.02) + (0.5)(0.05)} = \frac{0.006}{0.033} = \frac{2}{11}$$

متغیر تصادفی و توابع توزیع توأم $(x\,,\,y)$

❍ متغیر تصادفی (X)

یک کمیت را وقتی یک متغیر تصادفی می‌گوییم که به عنوان نتیجه‌ای از یک آزمایش مقادیر مختلفی را بگیرد که این مقادیر، قبل از آزمایش مشخص نباشد. که با X نمایش داده می‌شود.

به عبارت دیگر کمیتی است که مقادیر خود را با احتمال دریافت می‌کند و تابعی از فضای نمونه به مجموعه اعداد حقیقی است.

به عنوان مثال: در پرتاب سه سکه ما فقط علاقمند به دانستن تعداد شیرها می‌باشیم، بنابراین متغیرتصادفی X نشان‌دهندهٔ تعداد شیرها می‌باشد.

H: شیر و T: خط

فضای نمونه=$S=\{\underset{x=3}{\underset{\downarrow}{HHH}}, \underset{x=2}{\underset{\downarrow}{HHT}}, \underset{x=2}{\underset{\downarrow}{HTH}}, \underset{x=2}{\underset{\downarrow}{THH}}, \underset{x=1}{\underset{\downarrow}{HTT}}, \underset{x=1}{\underset{\downarrow}{THT}}, \underset{x=1}{\underset{\downarrow}{TTH}}, \underset{x=0}{\underset{\downarrow}{TTT}}\}$

بنابراین متغیر تصادفی x اعداد 0، 1، 2، 3 را می‌گیرد، حال می‌توانیم احتمال هر کدام را محاسبه کنیم.

احتمال این که هیچ شیری در پیشامدی مشاهده نشود: $P(X=0)=P(TTT)=\frac{1}{8}$

احتمال این که یک شیر در پیشامد مشاهده شود: $P(X=1)=P(HTT\,,\,THT\,,\,TTH)=\frac{3}{8}$

احتمال این که دو شیر در پیشامد مشاهده شود: $P(X=2)=P(HHT\,,\,HTH\,,\,THH)=\frac{3}{8}$

احتمال این که سه شیر در پیشامد مشاهده شود: $P(X=3)=P(HHH)=\frac{1}{8}$

مثال : یک جفت تاس را پرتاب می‌کنیم، فرض کنید متغیر تصادفی x نشان دهنده مجموع دو عدد ظاهر شده باشد فضای نمونه آزمایش و مقادیر متغیر تصادفی x را مشخص کنید.

حل :

فضای نمونه آزمایش شامل $36 = 6^2$ عضو می‌باشد.

$S = \{(1,1),(1,2),(1,3)....,(6,6)\}$

X = مجموع دو عدد ظاهر شده = 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، 10، 11، 12

○ انواع متغیرهای تصادفی

متغیر تصادفی گسسته

متغیر تصادفی پیوسته

متغیر تصادفی گسسته : متغیر تصادفی x که روی فضای نمونه گسسته تعریف شود را متغیر تصادفی گسسته می‌نامیم یعنی مقادیری که x می‌تواند بگیرد، **نقاط متناهی** یا **نامتناهی شمارش‌پذیر** است.

مانند: تعداد مشتریان در یک ساعت، تعداد آزمایشات لازم برای اولین پیروزی و .... .

متغیر تصادفی پیوسته

متغیر تصادفی x که روی فضای نمونه پیوسته تعریف شود را، متغیر تصادفی پیوسته می‌نامیم یعنی مقادیری که x می‌تواند بگیرید، مجموعه شمارش ناپذیر است، به عبارتی مجموعهٔ تمامی اعداد حقیقی یا فاصله‌هایی از مجموعهٔ اعداد حقیقی.

مانند: مدت زمان لازم برای اولین اتفاق

○ تابع احتمال (توزیع احتمال)

تابع احتمال تابعی است که دامنهٔ آن مقادیر ممکن متغیر تصادفی و حوزهٔ آن احتمال مربوط به هر تعداد متغیر تصادفی است. که به دو حالت تابع **احتمال گسسته** و **تابع احتمال پیوسته** بررسی می‌شود.

○ تابع احتمال گسسته (توزیع احتمال گسسته)

اگر متغیر تصادفی گسسته x مقادیر $x_1 , x_2 , ... , x_n$ را با احتمال‌های $p_1 , p_2 , ... , p_n$ بپذیرد، توزیع احتمال گسسته برای x نامیده می‌شود که با $f(x)$ یا $p(x)$ نمایش می‌دهند.

جدول مربوط به توزیع احتمال متغیر تصادفی گسسته x به صورت زیر می‌باشد:

x	x_1	x_2	....	x_i	.....	x_n	
$f(x_i)=p(x_i)$	p_1	p_2	....	p_i	.....	p_n	$\Sigma p(x_i) = \Sigma f(x_i) = 1$

شرایط تابع احتمال گسسته

$1.\forall x \quad f(x) = p(x)$	$f(x)$ در هر نقطه، احتمال در آن نقطه است ؛
$2.\Sigma f(x) = \Sigma p(x) = 1$	مجموع احتمال برابر یک است ؛

● **نحوهٔ بدست آوردن توزیع احتمال متغیر تصادفی گسسته y که از متغیر گسستهٔ x تبعیت می‌کند:**

۱ـ محاسبهٔ متغیر تصادفی گسسته y : با توجه به رابطهٔ داده شده برحسب x حساب می‌شود.

۲ـ محاسبهٔ $f(y)$: در نقاطی که مقدار متغیر تصادفی $y = f(x)$ بدست آمده از x های متفاوت برابر شوند، درآن نقاط $f(x)$ها را با هم جمع می‌کنیم ولی در نقاط دیگر $f(x)$ تغییر نمی‌کند.

مثال : توزیع احتمال‌های متغیر تصادفی x توسط جدول‌های زیر بیان شده است، توزیع متغیر y که بر طبق $y = x^2$ از متغیر تصادفی x تبعیت می‌کند، کدام است؟

a.

x_i	-1	0	1	2	
$f(x_i)$	0.1	0.2	0.3	0.4	$\Sigma f(x_i)=1$

$\xrightarrow{y_i = x_i^2}$

$y_i = x_i^2$	0	1	4	
$f(y_i)$	0.2	0.4	0.4	$\Sigma f(y_i)=1$

$$\begin{cases} f(y=0) = f(x=0) = 0.2 \\ f(y=1) = f(x=-1) + f(x=1) = 0.1 + 0.3 = 0.4 \\ f(y=4) = f(x=2) = 0.4 \end{cases}$$

b.

x_i	0	1	2	3	
$f(x_i)$	0.1	0.2	0.3	0.4	$\Sigma f(x_i)=1$

$\xrightarrow{y_i = x_i^2}$

$y_i = x_i^2$	0	1	4	9	
$f(y_i)$	0.1	0.2	0.3	0.4	$\Sigma f(y_i)=1$

$$\begin{cases} f(y=0) = f(x=0) = 0.1 \\ f(y=1) = f(x=1) = 0.2 \\ f(y=4) = f(x=2) = 0.3 \\ f(y=9) = f(x=3) = 0.4 \end{cases}$$

○ تابع احتمال پیوسته (تابع چگالی متغیرپیوسته)

اگر متغیر تصادفی x پیوسته باشد نمودار توزیع احتمال آن پیوسته می‌باشد که آن را تابع چگالی یا تابع احتمال گویند و با $f(x)$ یا $p(x)$ نمایش می‌دهند.

توجه کنید که تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوسته x را نمی‌توان به صورت جدولی نمایش داد.

● شرایط تابع احتمال پیوسته

تابع چگالی مثبت یا صفر است	؛	$1.\ f(x) \geq 0$
مساحت کل زیر منحنی چگالی برابر یک است	؛	$2.\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
احتمال دریک نقطه در تابع احتمال پیوسته،صفر است	؛	$3.\ x = a \Rightarrow p(x=a) = 0$
احتمال در هر فاصله، انتگرال در آن فاصله است	؛	$4.\ a < x < b \Rightarrow p(a<x<b) = \int_a^b f(x)dx$
		$5.\ p(a \leq x \leq b) = p\cancel{(x=a)}^{0} + p(a<x<b) + p\cancel{(x=b)}^{0} = p(a<x<b)$

• نحوهٔ بدست آوردن تابع چگالی متغیر تصادفی پیوسته y که از متغیر تصادفی پیوسته x تبعیت می‌کند:

۱) محاسبهٔ $x = g(y)$ با استفاده از $y = f(x)$: یعنی با استفاده از رابطهٔ $y = f(x)$ ، x را برحسب y بدست آوریم.

۲) محاسبهٔ $f(y)$: از رابطهٔ مقابل استفاده می‌شود: $\boxed{f(y) = |g'(y)| f(g(y))}$

توجه کنید علامت | | به معنی قدر مطلق می‌باشد.

بنابراین:

$$\boxed{\begin{array}{l} y = g(x) \longrightarrow x = g(y) \\ f(y) = |g'(y)| \times f_x(g(y)) \end{array}}$$

مثال ۱: تابع چگالی احتمال‌ها برای کمیت تصادفی x به صورت زیر بیان شده است:

$$f(x) = \frac{x^2}{63} \quad ; \ 3 < x < 6$$

تابع توزیع کمیت y که بر طبق رابطهٔ $y = -x$ از x تبعیت دارد کدام است؟ (اقتصاد ۷۵)

۱) $-6 < y < -3 \, , \, f(y) = \frac{y^2}{63}$

۲) $-6 < y < -3 \, , \, f(y) = \frac{y^2 - 6}{63}$

۳) $-6 < y < -3 \, , \, f(y) = \frac{y^2 - 3}{63}$

۴) $-6 < y < -3 \, , \, f(y) = \frac{-y^2}{63}$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$y = g(x) = -x \ \Rightarrow \ x = -y = g(y)$$

$$\begin{cases} g'(y) = -1 \\ \\ f(g(y)) = \frac{(-y)^2}{63} = \frac{y^2}{63} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(y) = |g'(y)| f_x(g(y)) = |-1| \frac{y^2}{63} = \frac{y^2}{63} \\ 3 < x < 6 \xrightarrow{y=-x} -6 < y < -3 \end{cases}$$

مثال ۲: تابع چگالی به صورت $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{a} & 1 \le x \le 5 \\ 0 & \end{cases}$ است، براساس آن تابع چگالی $y = 2 - \frac{1}{5}x$ عبارت است از:

۱) $f(x) = \begin{cases} \frac{y}{9} & 1 \le y \le \frac{9}{5} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

۲) $f(x) = \begin{cases} \frac{12+y}{8} & 1 \le y \le \frac{9}{5} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

۳) $f(x) = \begin{cases} \frac{y}{12} & 1 \le y \le \frac{9}{5} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

۴) $f(x) = \begin{cases} \frac{12-5y}{4} & 1 \le y \le \frac{9}{5} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

در ابتدا لازم است مقدار a محاسبه شود بنابراین:

$$\int_1^5 \frac{x+2}{a} = 1 \ \Rightarrow \ \frac{1}{a}\left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^5 = 1 \ \Rightarrow \ \frac{1}{a} \times 20 = 1 \ \Rightarrow \ \boxed{a = 20}$$

$$y = 2 - \frac{1}{5}x \Rightarrow 5y = 10 - x \qquad x = 10 - 5y = g(y)$$

$$\begin{matrix} g'(y) = -5 \Rightarrow |g'(y)| = 5 \\ f_x(g(y)) = \frac{10 - 5y + 2}{20} = \frac{12 - 5y}{20} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} f(y) = |g'(y)| f(g(y)) = 5\left(\frac{12 - 5y}{20}\right) \\ 1 \le x \le 5 \xrightarrow{y = 2 - \frac{1}{5}x} 1 \le y \le \frac{9}{5} \end{cases}$$

مثال۳: با توجه به جدول، موارد خواسته شده را حساب کنید.

x_i	0	1	2	3	
$p(x_i) = f(x_i)$	0.1	A	0.2	0.3	$\Sigma f(x_i) = 1$

a) مقدار A را بدست آورید.

حل :

$$\Sigma f(x_i) = 1 \Rightarrow 0.1 + A + 0.2 + 0.3 = 1 \Rightarrow A = 0.4$$

$P(X = 3) = f(X = 3)$ (b

حل :

$$P(X = 3) = 0.3$$

$P(X > 2)$ (c

حل :

$$P(X>2) = P(X = 3) = 0.3$$

$f(X > \sqrt{5})$ (d

حل :

$$P(X > \sqrt{5}) = P(X = 3) = 0.3$$

$f(X>5)$ (e

حل :

$$P(X > 5) = 0$$

$f(1.5 < X < 2.5)$ (f

حل :

$$f(1.5 < X < 2.5) = f(X = 2) = 0.2$$

مثال۴: تابع چگالی احتمال $f(x)$ که توزیع احتمال یک متغیر تصادفی پیوسته را توصیف می‌کند، کدام ویژگی را ندارد؟

۱) به ازاء هر نقطه مانند a ، $p(x = a) \neq 0$

۲) $f(x) \ge 0$ تابع چگالی مثبت یا صفر است.

۳) مساحت کل زیر منحنی چگالی برابر یک است.

۴) سطح زیرمنحنی چگالی بین a و b برابر است با $p(a<x<b)$

حل : طبق آنچه در شرایط تابع احتمال پیوسته گفته شد گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

مثال۵: تابع احتمال متغیر تصادفی به صورت زیر داده شده است، مقدار k کدام است؟

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{k} & 0\le x\le 4\\ 0 & \text{سایرمقادیر}\end{cases}$$

۱) 2　　۲) 4　　۳) 8　　۴) 16

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مساحت کل زیرمنحنی چگالی برابر یک است:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^4 \frac{x}{k}dx = 1 \Rightarrow \left.\frac{x^2}{2k}\right]_0^4 = 1 \Rightarrow \frac{16}{2k}=1 \Rightarrow \boxed{k=8}$$

نکته : اگر تابع چگالی متغیر تصادفی x به صورت چندضابطه‌ای باشد، لازم است مجموع مساحت‌های کل زیرمنحنی ضابطه‌ها برابر یک شود.

مثال۶: تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی x به صورت زیر داده شده است:

$$f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le 1\\ k-x & 1\le x\le 2\\ 0 & \text{برای سایرمقادیر}\ x\end{cases}$$

مقدار k چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$　　۲) 1　　۳) 2　　۴) 3

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \rightarrow \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (k-x)dx = 1$$

$$\left.\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^1 + \left.\left(kx-\frac{x^2}{2}\right)\right]_1^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}+2k-2-k+\frac{1}{2}=1 \Rightarrow k=2$$

مثال۷: چگالی احتمال‌های کمیت تصادفی x توسط تابع زیر بیان شده است:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{900}x & 0<x\le 30\\ 0 & \text{سایرمقادیر}\end{cases}$$

احتمال آن که متغیر تصادفی x مقدار خود را در فاصله (10 , 5) اختیارکند چقدر است؟

۱) $\frac{65}{900}$　　۲) $\frac{70}{900}$　　۳) $\frac{75}{900}$　　۴) $\frac{92}{900}$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

طبق شرایط تابع احتمال پیوسته، احتمال در هر فاصله انتگرال در آن فاصله است؛

$$P(5<x<10)=\int_5^{10}\frac{2x}{900}\,dx=\frac{x^2}{900}\Big]_5^{10}=\frac{75}{900}$$

مثال۸: کمیت تصادفی x در جامعه‌ای بر طبق قانون نمایی توزیع شده است، $0<x<\infty$ $f(x)=\frac{1}{20}e^{\frac{-x}{20}}$ احتمال این که کمیت تصادفی x ، مقداری مساوی با 125 ، اختیار کند، چقدر است؟ (مدیریت ۷۱)

۱) $\frac{1}{20}$ ۲) 1 ۳) 0 ۴) 0.1

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

احتمال در یک نقطه در تابع احتمال پیوسته، صفر است. $P(X=125)=0$

مثال۹: x به عنوان یک متغیر تصادفی معرف طول عمر لامپی است که بین صفر تا 160 ساعت کار می‌کند. احتمال این که این لامپ دقیقاً 80 ساعت کار کند برابر است با: (اقتصاد ۷۵)

۱) صفر

۲) 0.5

۳) این احتمال را تا زمانی که تابع چگالی x مشخص نباشد، نمی‌توان محاسبه کرد.

۴) این احتمال را تا زمانی که میانگین و واریانس x مشخص نباشد، نمی‌توان محاسبه کرد.

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

متغیر تصادفی x (طول عمر لامپ) پیوسته است، لذا: $P(x=80)=0$