

فصل اول

کلیات تحقیق در عملیات_ویژگی ها و فرآیندها

تعریف تحقیق در عملیات (operation research)

یک رویکرد علمی جهت حل مسائل مدیریتی و هدف یافتن بهترین تصمیم در بین تصمیم های موجود و با نام های علم مدیریت_روش های مقداری_علم تصمیم گیری هم بکار می رود.

کاربرد OR: در سازمان های دولتی، نظامی، خدماتی، بازرگانی، صنعتی، آموزشی، بهداشتی.

توسعه و گسترش OR: در طول جنگ جهانی دوم توسط دانشمندان انگلیسی انجام شده است.

ویژگی های OR:

۱_ تمرکز اصلی و اولیه OR بر تصمیم گیری مدیران است. ۲_ رویکرد OR یک رویکرد علمی است.

۳_ در OR مسائل و تصمیمات بانگاه سیستمی بررسی می شود. ۴_ OR یک دانش بین رشته ای است.

۵_ از مدل های ریاضی استفاده می شود. ۶_ از رایانه به وفور استفاده می شود.

مراحل تصمیم گیری در OR

۱_ تعریف مسأله ۲_ شناخت راه حل های ممکن ۳_ ارزیابی راه حل های ممکن ۴_ انتخاب یک راه حل

رویکرد علمی (روش علمی):

توسط دکارت فرانسوی در قرن ۱۷ تعریف شد و شامل مراحل زیر است:

۱_ تعریف مسأله ۲_ مشاهده ۳_ فرضیه ۴_ آزمایش ۵_ اجرای آزمایش ۶_ تایید یا رد مسأله

فصل اول کلیات تحقیق در عملیات_ویژگی ها و فرآیندها

اساس علم OR استفاده از مدلها خصوصا مدل های ریاضی است(مدل معمولا ساده شده واقعیت است.) اغلب واقعیت مسأله از پیچیدگی زیاد برخوردار است، در نتیجه انعکاس کامل پیچیدگی مسأله مشکل یا غیرممکن می باشد.

دسته بندی مدل ها با توجه به انتزاعی بودن آنها:

۱_ مدل شمایی : جایگزین فیزیکی از سیستم است که معمولا در اندازه های متفاوت از اصل سیستم نشان داده میشود(این دسته باکمترین انتزاع از واقعیت همراه است).

۲_ مدل قیاسی: عینا مشابه سیستم واقعی نیست اما رفتار آن شبیه رفتار سیستم است. مانند نمودارهای سازمانی.

۳_ مدل ریاضی: پیچیدگی روابط دربرخی سیستم همامنع از آن می شود که بتوان شکل سیستم ویا

رفتار آن را بااستفاده از ۲مدل قبلی نشان داد. لذا ساده سازی واقعیت وانتزاع آن باید بیشترباشد. از نمادها وسمبل ها برای بیان انتزاع رفتارسیستم استفاده می شود.

طبقه بندی مدل های ریاضی در OR :

۱_ قطعی ۲_ احتمالی ۳_ ترکیبی

قطعی: درشرایط اطمینان کامل ساخته می شوند(پارامترها قطعی و مشخص اند).

احتمالی: درشرایط نامعین و تصادفی رخ می دهند(پارامترها احتمالی اند واحتمالا ازیک تابع احتمال تبعیت می کنند).

ترکیبی: از مدل های قطعی و احتمالی اند.

نمونه هایی از انواع مدل های ریاضی :

قطعی: بهینه یابی خطی _ غیرخطی، برنامه ریزی خطی _ غیرخطی، حمل و نقل، تخصیص، برنامه ریزی آرمانی، برنامه ریزی عددصحیح، مدل های شبکه، روش های جست وجو.

احتمالی: تئوری صف، تحلیل سیستم، فرآیندمارکوف.

ترکیبی: GPM، PERT، برنامه ریزی پویا، شبیه سازی، کنترل موجودی.

براساس ماهیت تابع هدف یا محدودیت: ۱_ مدل بهینه یابی خطی ۲_ مدل بهینه یابی غیرخطی

ساختن مدل: مدل یعنی خلاصه ای ازیک مسأله دردنیا واقعی وسازمانی که اغلب شامل مجموعه ای ازروابط ریاضی است.

فصل اول کلیات تحقیق در عملیات_ویژگی ها و فرآیندها

مثال: فرض کنید هزینه تولید هر واحد و قیمت فروش هر واحد ۲۰ ریال باشد، مدل سود بصورت زیر است:

(X = تعداد تولید کالا و ۲۰ و ۵ مقادیر ثابت)

معادله سود $Z = 20X - 5X$ (متغیر ثابت $Z =$ و متغیر مستقل $X =$).



فصل دوم برنامه ریزی خطی_مدلسازی

برنامه ریزی خطی (linear progra): شامل مدلی است که دارای یک تابع هدف و تعدادی محدودیت می باشد که روابط خطی بین متغیرهای آن در تابع هدف و محدودیت ها وجود دارد.

اجزاء یک مساله LP:

۱_ متغیرهای تصمیم ۲_ تابع هدف ۳_ محدودیت ها

مثال هایی از مدل سازی و مدلسازی برنامه ریزی خطی:

مثال ۱: فرض کنید x_A, x_B به ترتیب تعداد تولیدات محصولات A, B باشد. هریک از عبارت های زیر را بصورت مدل بنویسید.

الف) مجموع تولیدات ۲ محصول از ۳۰ تا بیشتر نشود.

پاسخ: (البته شرط $x_A, x_B \geq 0$ در این مثال برقرار است، چون تعداد تولید نمی تواند منفی باشد)

$$x_A + x_B \leq 30$$

ب) حداکثر اختلاف تعداد تولید ۲ محصول ۵ تا باشد.

پاسخ:

$$|x_A - x_B| \leq 5 \quad \text{یا} \quad -5 \leq x_A - x_B \leq 5 \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x_A - 5 \leq x_B \leq x_B + 5 \\ x_B - 5 \leq x_A \leq x_B + 5 \end{cases}$$

(ج) محصول A حداقل به تعداد نصف محصول B تولید شود.

$$\text{پاسخ:} \quad 2x_A - x_B \geq 0 \quad \text{یا} \quad 2x_A \geq x_B$$

$$x_A \geq \frac{1}{2}x_B$$

(مثال ۲) فرض کنید x_B, x_A به ترتیب تعداد تولیدات محصولات B, A باشند و داشته باشیم:

$$2x_A + 3x_B = 24$$

اگر بخواهیم فقط یک نوع محصول تولید شود، استراتژی تولید چگونه است؟

پاسخ: یعنی یا محصول B تولید شود و محصول A تولیدش صفر شود و یا برعکس.

$$1_ \text{ اگر فقط A تولید شود: } 2x_A = 24 \rightarrow x_A = 12$$

$$2_ \text{ اگر فقط B تولید شود: } 3x_B = 24 \rightarrow x_B = 8$$

(مثال ۳) فرض کنید کارخانه ای دو نوع محصول تولید می کند، (A, B) اگر تمام وقت صرف تولید A شود، حداکثر ۴۰ تا محصول و اگر تمام وقت صرف تولید B شود، حداکثر ۳۰ تا محصول میتوان تولید کرد. رابطه بین تولید و محصول A, B چگونه است.

پاسخ: جاهای خالی را طوری پرمی کنیم که به اعداد سوال برسیم:

$$\bigcirc \quad x_B \quad \bigcirc \quad \square$$

$$x_A +$$

$$+ 4x_B \leq 120$$

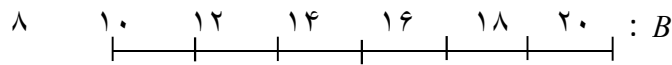
$$3x_A$$

(مثال ۴) مدت زمان لازم برای تولید محصول A، دو برابر مدت زمان تولید محصول B است.

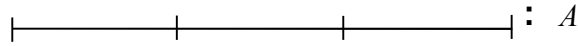
فصل دوم_ برنامه ریزی خطی_ مدل سازی

اگر تمام وقت صرف تولید A شود، ۴۰ تا محصول میتوان تولید کرد. ۴۰ تا محصول میتوان تولید کرد. محدودیت مربوطه چیست؟

پاسخ: زمان باتولید نسبت عکس دارد:



۲ساعته ۶تا



۴ساعته ۳تا

$$\Rightarrow x_B = 20 \text{ فقط } B \text{ و } x_A = 40 \text{ فقط } A$$

$$\Rightarrow x_A + 2x_B \leq 40 \text{ یا } \frac{1}{2}x_A + x_B \leq 20$$

مثال هایی از مدل سازی برنامه ریزی خطی:

۱_ **مسئله تولید:** کارخانه ای ۳ نوع محصول تولید می کند. برای تولید هر واحد از محصول نیاز به ماده اولیه، زمان و ماشین آلات می باشد. جدول زیر میزان استفاده هر یک از محصولات و همچنین میزان منابع موجودی و سود فروش هر واحد از هر محصول را داده است. مسئله را در قالب یک مسئله برنامه ریزی خطی فرموله کنید.

موجودی	محصول C	محصول B	محصول A	
۲۴۰۰	۶	۵	۷	ماده اولیه (کیلوگرم)
۳۲۰۰	۳	۶	۴	زمان (ساعت)
۳۹۰۰	۶	۵	۹	ماشین آلات (ساعت)
	۱۴	۱۸	۱۵	سود هر واحد (هزار تومان)

پاسخ:

(($i = A, B, C$)) تعداد تولید محصول i

معرفی متغیرهای تصمیم

(x_i)

$$\max Z = 15x_A + 18x_B + 14x_C$$

$$s.t \begin{cases} 7x_A + 5x_B + 6x_C \leq 2400 \\ 4x_A + 6x_B + 3x_C \leq 3200 \\ 9x_A + 5x_B + 6x_C \leq 3900 \\ x_A, x_B, x_C \geq 0 \end{cases}$$

مثال ۲) مسأله سرمایه گذاری : شخصی ۷۰ میلیون تومان سرمایه دارد که می خواهد آن را در بخش های مختلف سرمایه گذاری کند، فرضیه های سرمایه گذاری عبارتند از:

۱_ اسناد خزانه بابهره سالانه ۹٪ ۲_ اوراق قرضه با بهره سالانه ۸٪

۳_ خرید سهام بابهره سالانه ۱۲٪ ۴_ سپرده بانکی بابهره سالانه ۷٪

این سرمایه جهت کاهش ریسک، استراتژی های زیر را برای سرمایه گذاری اتخاذ نموده است:

الف) مجموع سرمایه گذاری در خرید سهام از ۳۰٪ کل سرمایه بیشتر نشود.

ب) مبلغ سرمایه گذاری در سپرده بانک و اوراق قرضه مجموعاً حداقل ۴۰٪ کل سرمایه باشد.

ج) نسبت مجموع سرمایه گذاری در بانک و خرید سهام به مجموع دوزمینه دیگر دیگر مثل ۳به ۲ باشد.

مثال : مسأله را در قالب یک LP فرموله کنید.

پاسخ: مسأله از جنس سود (max) و متغیرهای تصمیم اوراق قرضه x_1 ، سپرده بانک x_2 ، اسناد خزانه x_3 ، خرید سهام x_4

$$s.t \begin{cases} x_4 \leq 21/000/000 \\ x_1 + x_2 \geq 28/000/000 \\ \frac{x_2 + x_4}{x_1 + x_3} = \frac{3}{2} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 70/000/000 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

$$\max Z = 0/08x_1 + 0/07x_2 + 0/09x_3 + 0/12x_4$$

مثال) مسأله حمل و نقل : یک شرکت حمل و نقل می خواهد تعدادی کالا از چند کارخانه به چند شهر حمل کند. هزینه حمل هر واحد کالا از هر مبدأ به هر مقصد و هم چنین میزان میزان عرضه و تقاضای مبدا و مقصد در جدول زیر آمده است. مسأله را در قالب یک مسأله LP فرموله کنید.

مقصد	۱	۲	۳	
۱	۷	۹	۶	۲۵۰
۲	۸	۱۰	۱۴	۱۵۰
مبدأ ۳	۱۱	۱۰	۹	مبدأ ۲۰۳
	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	مبدأ ۱
عرضه		۱۵۰		۲۰۰
مقصد	مقصد ۲۵۰			مقصد ۱
تقاضا	۲۰۰			۳۰۰
	۱۰۰			

نوع تابع هدف هزینه یابی است پس ازجنس min است.

پاسخ: متغیرهای تصمیم: تعداد

کالای حمل شده از مبدأ i به مقصد j x_{ij} (به عنوان مثال x_{13} تعداد کالایی از مبدأ ۱ به مقصد ۳ است).

$$\Rightarrow \min z = 7x_{11} + 9x_{12} + 6x_{13} + 8x_{21} + 10x_{22} + 14x_{23} + 11x_{31} + 10x_{32} + 9x_{33}$$

$$s \cdot t \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 250 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 150 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 200 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 100 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 200 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 300 \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

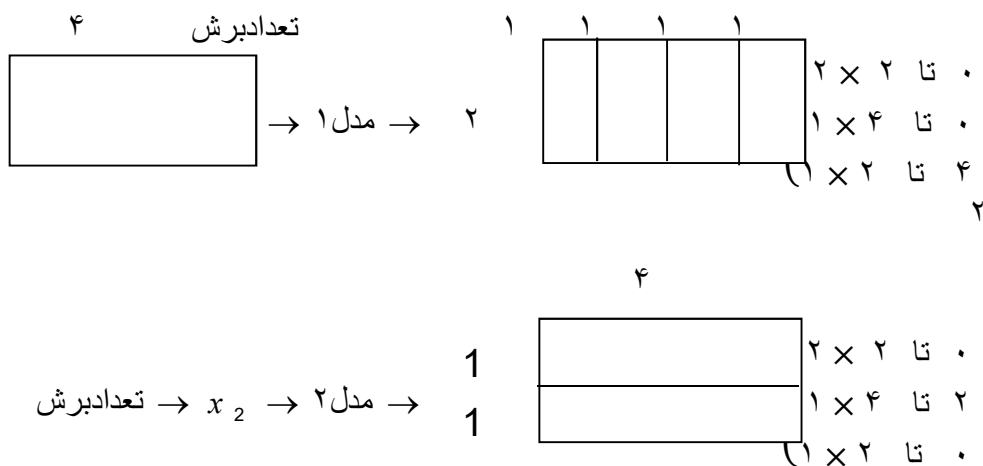
مثال ۴) مسأله برش چوب: یک شرکت چوب بری می بایست سفارش هایی را به ابعاد زیر تهیه و به متقاضیان تسلیم نماید.

ابعاد درخواستی	1×2×11	1×4×11	2×2×11
میزان سفارش	۱۳۰۰	۱۰۰۰	۷۰۰

تخته های استاندارد موجود به ابعاد 2×4×11 هستند، این شرکت

چگونه باید برش را انجام دهد، تا ضمن تهیه سفارشات کمترین میزان استفاده از تخته را داشته باشد.

حل مسأله: متغیرهای تصمیم: مدل های مختلف برش هستند که می تواند به حالت های زیر باشد.



$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc} 2 & 2 \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ تا } 2 \times 2 \\ 0 \text{ تا } 1 \times 4 \\ 0 \text{ تا } 1 \times 2 \end{array} \right.$$

۲ → مدل ۳ → x_3 → تعدادبرش

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ تا } 2 \times 2 \\ 0 \text{ تا } 1 \times 4 \\ 2 \text{ تا } 1 \times 2 \end{array} \right.$$

۲ → مدل ۴ → x_4 → تعدادبرش

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc} 2 & 2 \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ تا } 2 \times 2 \\ 1 \text{ تا } 1 \times 4 \\ 2 \text{ تا } 1 \times 2 \end{array} \right.$$

۱ → مدل ۵ → x_5 → تعدادبرش

بعداز مدل سازی نوبت به حل مدل است.

روش حل مسائل LP ؟

البته برای مسائل خاص روش های ساده تری هم وجود دارد که به همه آنها میپردازیم

فصل سوم: روش ترسیمی یا هندسی :

شروع برنامه ریزی خطی در سال ۱۹۴۱ با تحقیقات اقتصاددان معروف "لئونتیف" همراه بود. همزمان "هیچکاک" مدل حمل و نقل را به طریق LP تفسیر کرد (بعداً توسط "کوپ منز" نیز انجام شد). پیشرفت LP و حل آن مدیون ریاضیدان معروف "دنتریگ" بوده است (۱۹۴۷).

مفروضات LP:

۱_ **فرض تناسب** : هر فعالیت به تنهایی و مستقل از سایر فعالیت ها عمل می کند (آهنگ تغییر یا شیب رابطه تابعی ثابت است).

مثال: فرض کنیم $z = 2x$

$$\begin{array}{llll} \underline{x + 0/1, z + 0/2} & x = 3/1 \rightarrow z = 6/2 & \underline{x + 0/2, z + 0/4} & x = 3/2 \rightarrow z = 6/4 \\ x = 3 \rightarrow z = 6 & & & \end{array}$$

۲_ **فرض جمع پذیری**: روابط ریاضی بین متغیرها در هدف و محدودیت ها بصورت جمع جبری است (حاصل ضرب متغیرها و... دیده نمی شود. فقط مضرب عددی از هر متغیر).

$$2x_1 + x_2 \leq 5 \rightarrow \text{خطی} \qquad 2x_1 + x_1 x_2 \leq 5 \rightarrow \text{غیرخطی}$$

$$\frac{x_1 + x_2}{3} \leq x_3 \rightarrow \text{خطی} \qquad \frac{x_1 + x_2}{x_1} \leq x_2 \rightarrow \text{غیرخطی}$$

۳_ **فرض بخش پذیری** : متغیرهای تصمیم میتواند هر عدد دلخواهی را بپذیرند.

تذکر: اگر ذکر شد متغیری فقط مقادیر صحیح را میتواند اختیار کند، برنامه ریزی عدد صحیح است.

۴_ **فرض معین بودن (قطعی بودن)**: کلیه پارامترهای مدل LP اعداد ثابت و مشخص اند.

روش ترسیمی برای حل مسایل LP (با حداکثر ۲ متغیر):

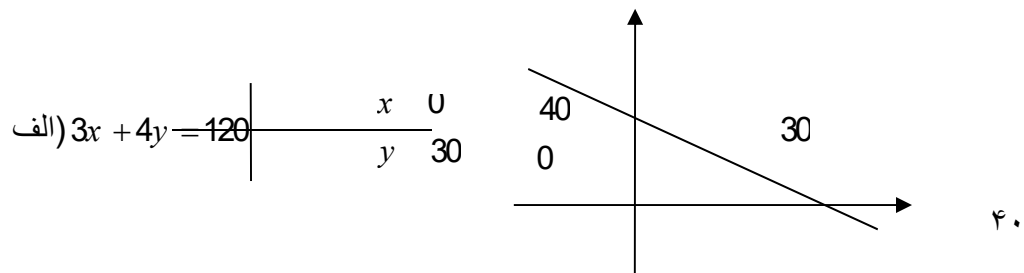
یادآوری از خط و ویژگی های آن: (تمام نکات ترسیمی برای حالت ۲ بعدی ذکر میشود)

معادله کلی خطی بصورت $ax + by = c$ است (a, b همزمان نمی توانند صفر باشند)

$$2x + 3y = 6, \quad x = 2y - 5, \quad x = 3, \quad y = 4$$

برای رسم یک خط داشتن ۲ نقطه کافی است. (بهترین نقاط معمولاً در محل برخورد با محورهاست)

مثال: خطوط زیر را رسم کنید.



شیب خط $ax + by = c$ برابرست با $m = \frac{-a}{b}$. اگر $b = 0$ بود معمولاً می گویند شیب تعریف نشده است

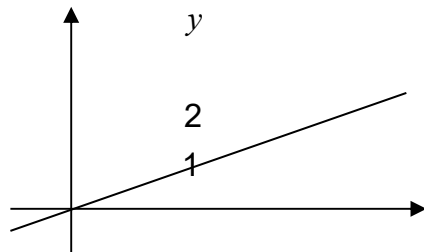
و بصورت عدد x (خط عمودی) نشان می دهند.

مثبت بودن شیب یعنی با افزایش $x \leftarrow y$ افزایش می یابد.

منفی بودن شیب یعنی با افزایش $x \leftarrow y$ کاهش می یابد.

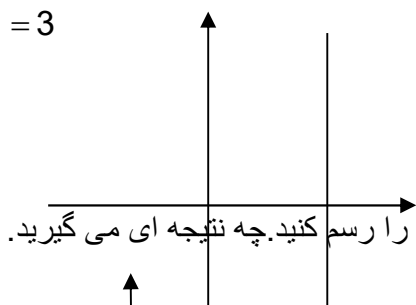
ب) $2x - 5y = 0$

x	0	5
y	0	2

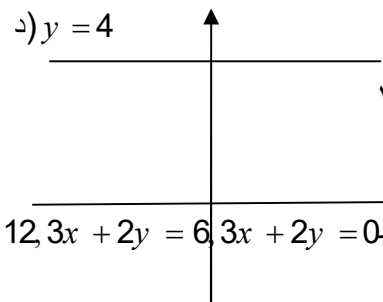


($c=0$ ← خط از مبدأ می گذرد)

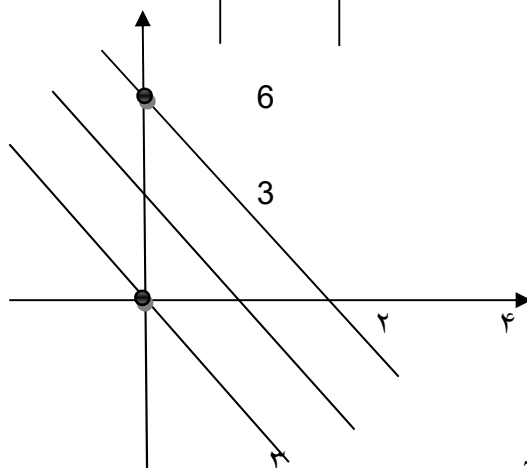
ج) $x = 3$



د) $y = 4$



مثال(مهم): سه خط $3x + 2y = 12$, $3x + 2y = 6$, $3x + 2y = 0$ را رسم کنید. چه نتیجه ای می گیرید.



افزایش $z \rightarrow z = 12$

$z = 6$

$z = 0$

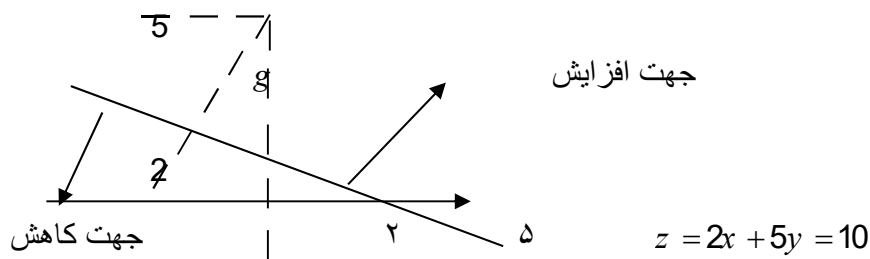
کاهش z

چون ضرایب x, y عوض نشده، پس خطوط موازی اند، اما اگر فرض کنیم $z = 3x + 2y$ ، حداقل به ازای سه مقدار $z = 6, z = 12, z = 0$ میتوان فهمید که جهت افزایش و کاهش z چگونه است.

می خواهیم بدانیم به کمک یک خط چگونه می توان جهت افزایش یا کاهش z را معلوم کرد. (به مثال های بعد برای پاسخ به این سوال توجه نمایید).

مثال: نمودار $2x + 5y = 10$ را رسم کنید. جهت افزایش یا کاهش $z = 2x + 5y$ را معلوم کنید.





اول رسم خط: به چنددلیل (روش) می توان جهت افزایش یا کاهش z را معلوم کرد.

۱_ z را به ازای عدد دیگری (غیر از ۲) رسم کنید مثلاً $z = 20$ ، هر طرف که قرار گرفت، جهت کاهش یا افزایش معلوم می گردد (معمولاً وقت گیر است).

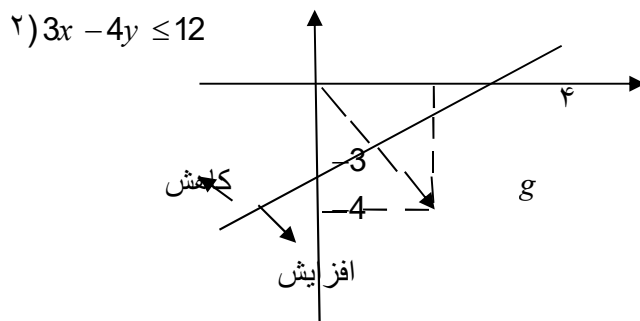
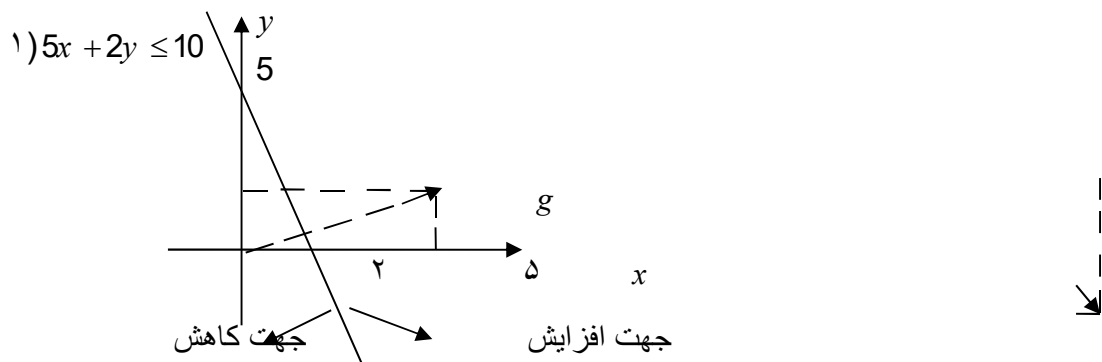
۲_ یک نقطه دلخواه انتخاب کنید، مثلاً در اینجا $o(0,0)$. با قرار دادن $z = 0$ می شود. یعنی به سمت مبدأ، z کمتر شد (شاید سخت باشد).

۳_ ضرایب x, y هر دو مثبت اند. در این مثال، x, y زیاد شوند z زیاد می شود.

۴_ شاید مهمترین روش باشد. استفاده از بردار گرادیان. ضرایب x, y ، $g(2,5)$. هر کجا نقطه g بدست آمد، از مبدأ به سمت g و ادامه اش همیشه جهت افزایش است.

ویژگی ها: از آنجایی که محدودیت های LP همیشه $(=)$ نشینند، $(\leq)$ یا $(\geq)$ هم داریم (از این می توان برای رسم این گونه نواحی استفاده کرد).

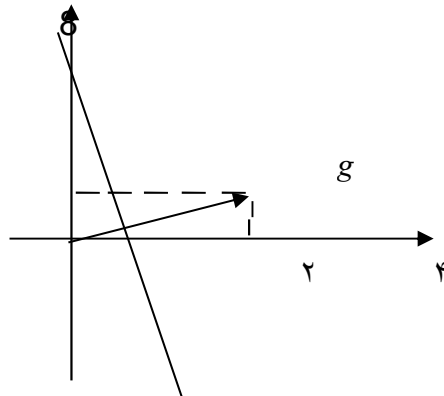
مثال: نواحی مربوط به محدودیت های زیر را رسم کنید.



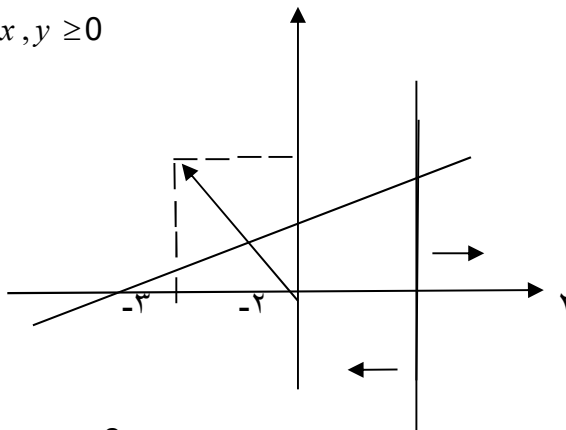
نکته ۱: زمانی که چند محدودیت داریم یعنی اشتراک بین همه.

نکته ۲: $x, y \geq 0$ یعنی x, y نامنفی اند، یعنی فقط ربع اول.

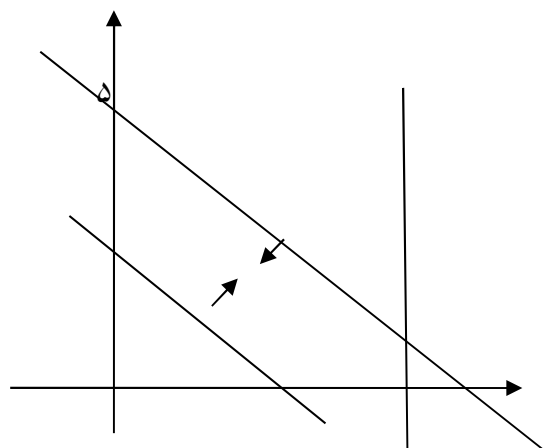
$$۳) \begin{cases} 4x + y \leq 8 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



$$۴) \begin{cases} -2x + 3y \leq 6 \\ x \leq 2 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



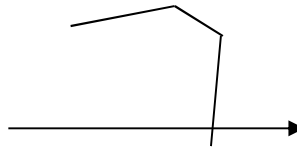
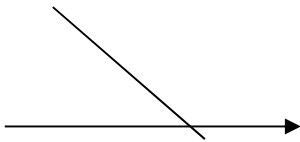
$$۵) \begin{cases} x + y \geq 2 \\ 3x + 4y \leq 15 \\ x \leq 4 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



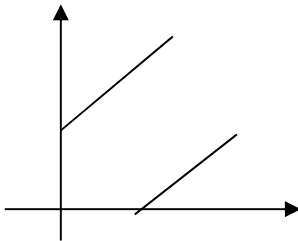
ناحیه شدنی: اشتراک تمام محدودیت های یک مسأله LP ناحیه شدنی (ناحیه موجه، منطقه جواب) می نامیم.

سوال: ناحیه شدنی یک مساله LP چه شکل هایی می تواند باشد؟

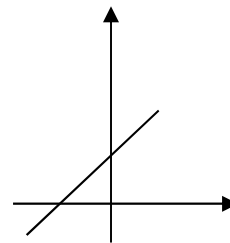
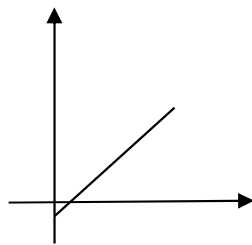
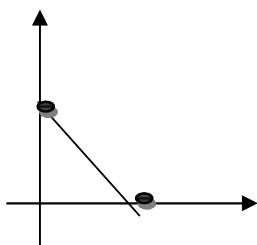
پاسخ ۱ _ : ناحیه شدنی می تواند یک چند ضلعی باشد (البته هم روی آن وهم داخل).



۲_ ناحیه شدنی می تواند یک منطقه نامحدود (بی کران) باشد.

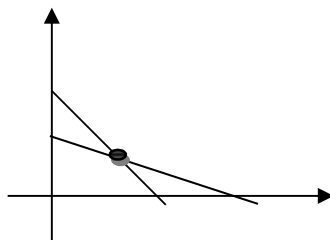


۳_ ناحیه شدنی می تواند خط، نیم خط، پاره خط باشد.

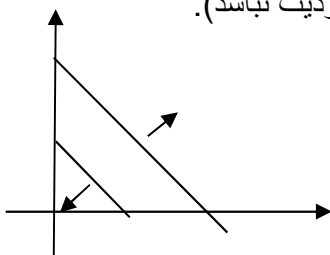


تذکر: در مسایل برنامه ریزی ممکن است شرایط نامنفی بودن متغیرها ذکر نشود، همچنین ممکن است قیود بصورت $(=)$ باشند.

۴_ ناحیه شدنی می تواند فقط یک نقطه باشد.



۵_ ناحیه شدنی یک مسأله می تواند تهی باشد (هیچ اشتراکی بین محدودیت نباشد).



یافتن جواب بهینه یک مسأله LP از روش ترسیمی:

اجزای LP: $\left. \begin{array}{l} \text{متغیر تصمیم} \\ \text{تابع هدف} \\ \text{محدودیتها} \end{array} \right\}$

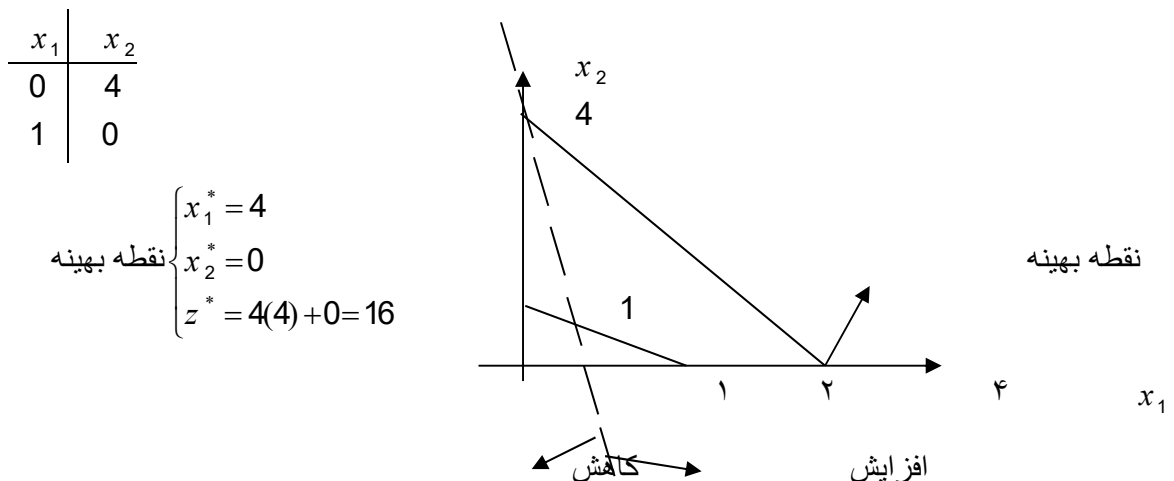
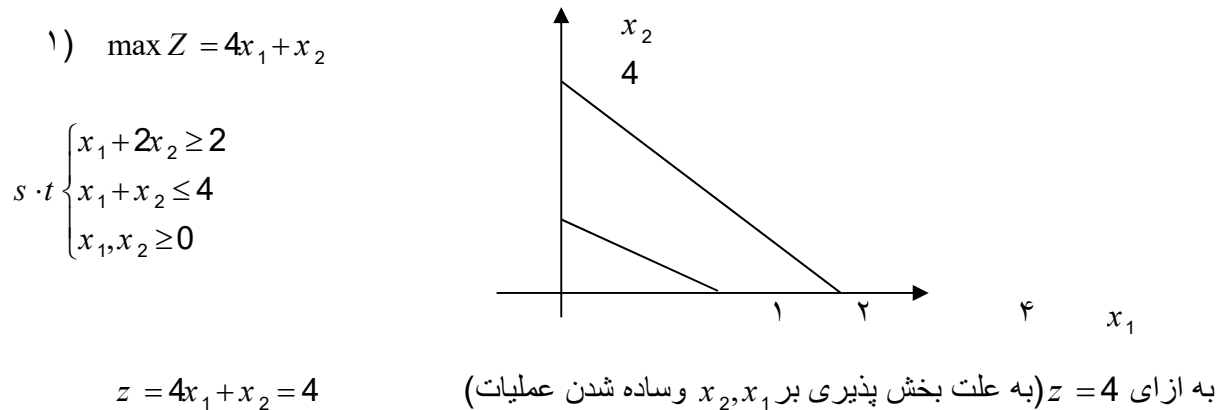
روش حل مسأله LP از طریق هندسی:

گام ۱) محدودیت ها را با رسم و اشتراک تمامی آنها رابایید (ناحیه موجه (شدنی)).

گام ۲) تابع هدف را به ازای z دلخواهی رسم کنید و تا تعیین جهت افزایش و کاهش z در جهت مطلوب (برای $\max \leftarrow$ افزایش و برای $\min \leftarrow$ جهت کاهش) حرکت کنید تا بهترین نقطه را بیابید.

نکته: فقط درحالتی که ناحیه موجه تهی است جواب بهینه نداریم. وزمانی که جواب یک نقطه است بدون توجه به تابع هدف جواب بهینه همان نقطه است.

مثال ۱: جواب بهینه مسائل LP زیر را بدست آورید.



تعریف چند اصطلاح:

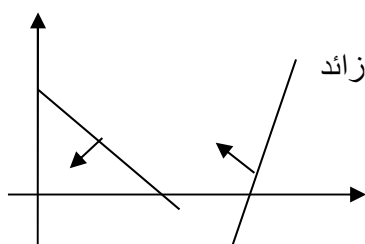
ناحیه شدنی (موجه): اشتراک همه محدودیت های مسأله.

محدودیت موثر: محدودیتی که درتشکیل ناحیه موجه تأثیر دارد. (وجود یا حذف آن ناحیه شدنی را تغییر می دهد).

محدودیت زائد: محدودیتی که درتشکیل ناحیه موجه تأثیری ندارد.

محدودیت فعال (الزام آور): محدودیتی که نقطه بهینه روی آن واقع است.

گوشه: نقطه برخورد حداقل دو محدودیت (در دوی بعدی).

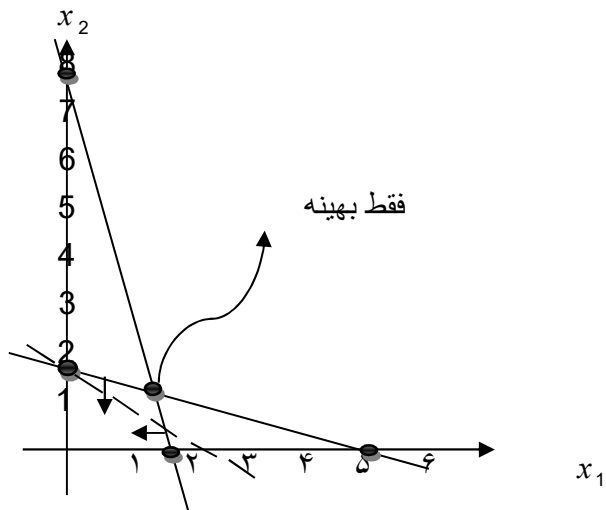


مثال ۲: مسأله LP زیر را به روش ترسیمی (هندسی) حل کنید.

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 4x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad z = 2x_1 + 3x_2 = 6$$

$$\begin{array}{c|c} x_1 & x_2 \\ \hline 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{array}$$



برای یافتن نقطه بهینه باید دستگاه دو معادله دو مجهول روبرو را حل کنیم:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 6 \\ 4x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$$

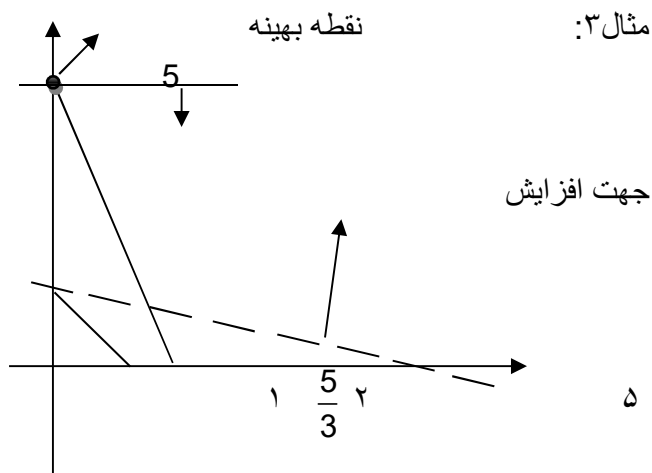
$$x_1^* = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{6-24}{1-12} = \frac{18}{11} \quad \text{و} \quad x_2^* = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{8-24}{1-12} = \frac{16}{11}$$

هر دو محدودیت کارکردی فعال دارند.

$$\max Z = x_1 + 5x_2$$

$$s.t \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

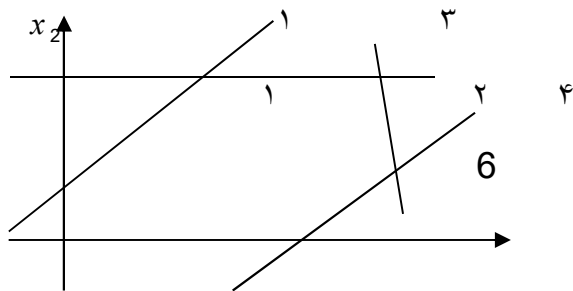
$$\text{نقطه بهینه} \begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 5 \\ z^* = 0 + 5(5) = 25 \end{cases}$$



نکته: نقطه $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ که بهینه شد، گوشه است که از محل تلاقی بیشترین دو محدودیت به وجود آمد. به این گوشه تبهگن (تباهیده) گفته میشود و در واقع تبهگن بهینه است یا تبهگن دائمی.

نکته: اگر m تعداد محدودیت و n تعداد متغیرهای تصمیم یک مسئله باشد، حداکثر تعداد نقاط گوشه عبارت است از: $\frac{(m+n)!}{m!n!}$ (بنا به اصل شمارش و رابطه ترکیب).

مثال: چند گوشه در شکل زیر وجود دارد.

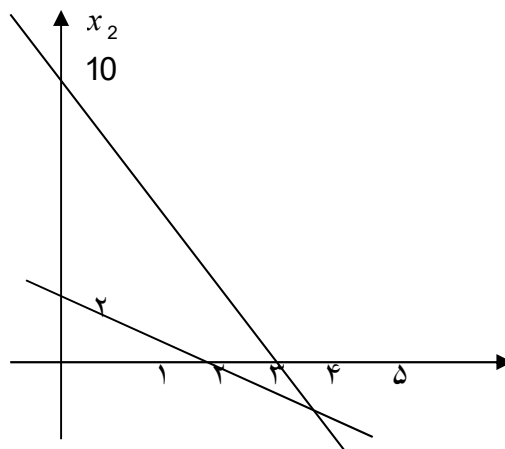


حل: در این شکل $n = 2, m = 4$ لذا $m + n = 6$ و این یعنی:

$$\text{حداکثر تعداد نقاط گوشه} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 1 \times 4!} = 15$$

$$\max Z = x_1 + 3x_2$$

$$s.t \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



مثال ۴:

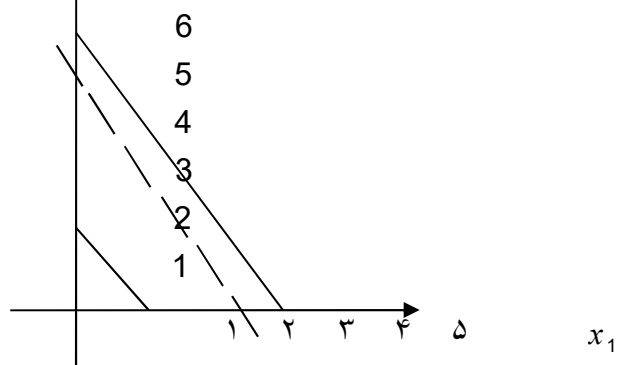
ناحیه اشتراک نداریم. یعنی تهی است، پس مسئله فاقد جواب بهینه است

نکته: وقتی که ناحیه شدنی Φ باشد، تابع هدف هیچ نقشی ندارد.

$$\max Z = 5x_1 + 4x_2 \quad \text{و} \quad s.t \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{مثال ۵:}$$

$$5x_1 + 4x_2 = 20$$

x_1	x_2
0	5
4	0



آخرین برخورد؟ چگونه بدانیم؟

۱_ مختصات دو نقطه انتهایی A, B را قرار می دهیم در z هر کدام بهتر شد.

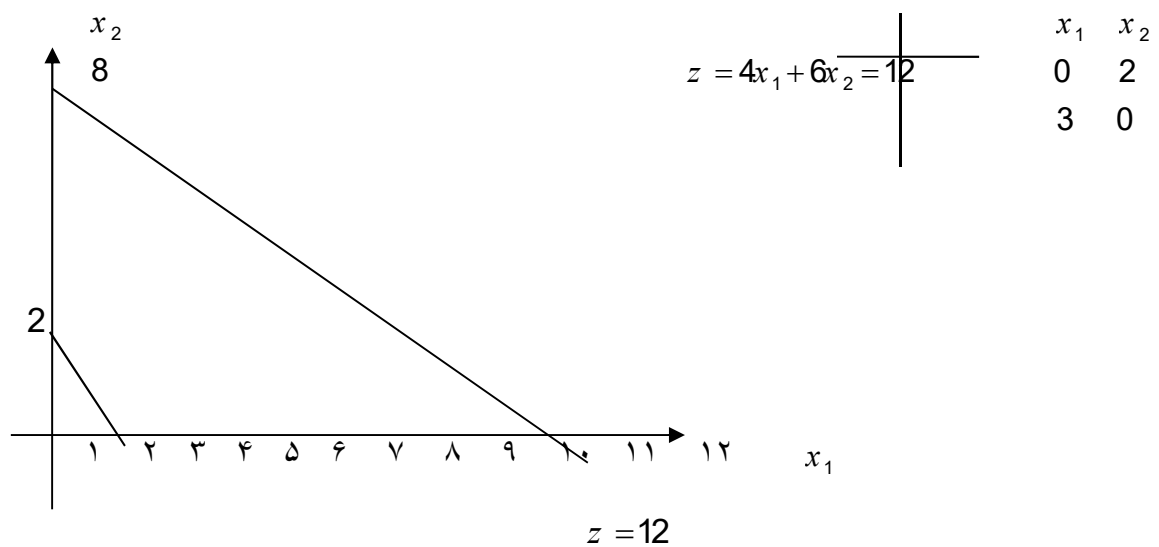
۲_ از شیب کمک می گیریم شیب هدف $= \frac{-5}{4}$

$$| \text{شیب هدف} | = \frac{5}{4} = 1/25 \quad | \text{شیب محدودیت شامل } AB | = \frac{6}{5} = 1/2$$

هدف شیب بیشتر $\leftarrow$ هدف عمودی تر $\leftarrow$ آخرین برخورد A خواهد بود.

$$\text{نقطه بهینه} \begin{cases} x_1^* = 5 \\ x_2^* = 0 \end{cases} \Rightarrow z^* = 5(5) + 4(0) = 25$$

مثال ۶: $\max Z = 4x_1 + 6x_2$ و $s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$



$$| \text{شیب هدف} | = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{و} \quad | \text{شیب محدودیت شامل } AB | = \left| \frac{-2}{3} \right| = \frac{2}{3}$$

شیب ها برابر $\leftarrow A, B$ همزمان قطع می شوند پس هم A بهینه است، هم B و هم کل خط AB

$$A \begin{vmatrix} 12 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow z = 4(12) + 6(0) = 48 \quad \text{و} \quad B \begin{vmatrix} 0 \\ 8 \end{vmatrix} \rightarrow z = 4(0) + 6(8) = 48$$

چند جواب بهینه داریم. جواب بهینه چندگانه به (دگرین) معروف است.

$$AB \begin{vmatrix} ? \\ ? \end{vmatrix} \quad AB \text{ نقاط} = \lambda A + (1-\lambda)B \quad \lambda \in [0,1]$$

مثلا

$$\lambda = 0/5 \rightarrow 0/5 \left| \begin{array}{c} 12 \\ 0 \end{array} \right| + 0/5 \left| \begin{array}{c} 0 \\ 8 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 6 \\ 4 \end{array} \right| \rightarrow z = 48$$

$$\lambda = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4} \left| \begin{array}{c} 12 \\ 0 \end{array} \right| + \frac{3}{4} \left| \begin{array}{c} 0 \\ 8 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 3 \\ 6 \end{array} \right| \rightarrow z = 48$$

$$s \cdot t \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

مثال ۷:

$$\max Z = 4x_1 + 6x_2 \quad \text{و}$$