○ امیدریاضی متغیر تصادفی (میانگین، مقدارمتوسط، ارزش انتظاری، μ_x، E (X))

ـ امیدریاضی متغیرتصادفی x، حد متوسطی است که انتظار می‌رود برای متغیر تصادفی x اتفاق بیافتد.

ـ امیدریاضی همان میانگین موزون است که احتمالات درآن، نقش وزن‌ها (ضرایب) را بازی می‌کنند.

ـ دریک مجموعه از مقادیر یک جامعه امیدریاضی مرکز ثقل جامعه است.

امیدریاضی متغیر تصادفی x به صورت زیر نشان داده می‌شود:

x امیدریاضی متغیرگسستهٔ : $E(x) = \sum_{\forall x} x f_x(x)$ (به شرط همگرایی Σ)

x امیدریاضی متغیرپیوسته : $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x) dx$ (به شرط موجود بودن $\int$)

● نکات مهم امیدریاضی

۱ـ $-\infty < E(x) < +\infty$

۲ـ امیدریاضی یک تابع از متغیر تصادفی x با تابع توزیع احتمال $f_x(x)$ به فرم زیر است:

گسسته: $E[k(x)] = \sum_{\forall x} k(x) f_x(x)$

پیوسته: $E[k(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x) f_x(x) dx$

۳ـ اگر a و b مقادیر ثابتی فرض شوند، روابط زیر برای امیدریاضی می‌توانند برقرار باشند:

$$E(\pm a) = \pm a$$
$$E(\pm bx) = \pm bE(x)$$
$$E(\pm ax \pm b) = \pm aE(x) \pm b$$

۴ـ اگر x و y دو متغیر تصادفی، h (x) و g (x) توابعی از x باشند، آن‌گاه روابط زیر برای امیدریاضی می‌توانند برقرار باشند:

$$\boxed{\begin{array}{l} E\left[g(x)\pm h(x)\right]=E\left[g(x)\right]\pm E\left[h(x)\right] \\ E(\dots E(x))=E(x) \\ E(\pm ax\pm by\pm c)=\pm aE(x)\pm bE(x)\pm c \end{array}}$$

۵ـ هنگام محاسبهٔ $E\left(g(x)\right)$ تابع توزیع f (x) به هیچ شکلی تغییر نمی‌کند، به عنوان مثال:

$$E\left(x^2\right)=\sum x^2 f_x(x)$$

۶ـ هرگاه تابع چگالی به ازای x های مثبت تعریف شده باشد یعنی $x>0$ می‌توان امید ریاضی را به طریق زیر محاسبه کرد:

$$E(x)=\int_0^\infty\left[1-F(x)\right]dx$$

مثال۱: تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی پیوسته x به صورت $f(x)=1-\frac{1}{2}x$ برای $0\le x\le 2$ داده شده است. میانگین و $p(1\le x<2)$ به ترتیب از راست به چپ برابر است با: (اقتصاد ۷۰)

۱) $\frac{3}{4},1$ ۲) $\frac{1}{4},\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{4},1$ ۴) $\frac{3}{4},\frac{2}{3}$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$E(x)=\int_0^2 xf(x)dx=\int_0^2 x\left(1-\frac{1}{2}x\right)dx=\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg]_0^2=\frac{4}{2}-\frac{8}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\Rightarrow\boxed{E(x)=\frac{2}{3}}$$

$$p(1\le x<2)=\int_1^2\left(1-\frac{1}{2}x\right)dx=\left(x-\frac{x^2}{4}\right)\Bigg]_1^2=\frac{1}{4}\Rightarrow\boxed{p(1<x<2)=\frac{1}{4}}$$

مثال۲: کدام تساوی در مورد عمل‌کننده امیدریاضی غلط است. (a و c مقادیر ثابت هستند)؟

۱) $E\left(c(a+x)\right)=a+cE(x)$ ۲) $E(a+x)=a+E(x)$

۳) $E\left[(cx)\right]=cE(x)$ ۴) $E(a)=a$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$E\left[c(a+x)\right]=E(ca+cx)=E(ca)+E(cx)=ca+cE(x)$$

مثال۳: تابع چگالی کمیت تصادفی x به صورت زیر بیان شده است:

$$f(x)=\frac{2x}{9}\qquad 0<x<3$$

امیدریاضی کمیت تصادفی y که بر طبق رابطه $y=2x+1$ از کمیت x تبعیت می‌کند، چقدر است؟

۱) 3.5 ۲) 4 ۳) 2 ۴) 5

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

برای محاسبهٔ امیدریاضی کمیت تصادفی y، ابتدا باید امیدریاضی کمیت تصادفی x را به دست آوریم:

$$E(x)=\int_0^3 x.f(x)dx=\int_0^3 x.\frac{2x}{9}dx=\int_0^3\frac{2}{9}x^2dx=\frac{2}{27}x^3\Bigg]_0^3=2\Rightarrow\boxed{E(x)=2}$$

$$E(y)=E(2x+1)=2E(x)+1=2(2)+1=5\Rightarrow\boxed{E(y)=5}$$

مثال۴: تابع توزیع (توزیع تجمعی احتمال) کمیت تصادفی x به صورت زیر بیان شده است:

$$F(x)=\frac{x^2+3x}{10} \qquad 0<x<2$$

امیدریاضی کمیت تصادفی x کدام است؟ (اقتصاد ۷۷)

۱) $E(x)=0.4$ ۲) $E(x)=1$ ۳) $E(x)=1.13$ ۴) $E(x)=1.5$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

توجه کنید که برای بدست آوردن $E(x)$، حتماً باید ابتدا تابع چگالی احتمال $(f(x))$ را حساب کنیم، بنابراین:

$$f_x(x)=\left(F_x(x)\right)'=\left(\frac{x^2+3x}{10}\right)'=\frac{2x+3}{10}$$

$$\int_0^2 x f_x(x)dx=\int_0^2\frac{x(2x+3)}{10}dx=\frac{1}{10}\int_0^2\left(2x^2+3x\right)dx=\frac{1}{10}\left(\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)\Bigg]_0^2$$

$$\frac{1}{10}\left(\frac{16}{3}+\frac{12}{2}\right)=1.13$$

مثال۵، تابع احتمال (قانون توزیع احتمال‌ها)، به صورت زیر تعریف شده است:

x_i	-1	0	1	2
$p(x_i)$	0.3	0.3	0.3	0.1

امیدریاضی x^2، یعنی $E\left(x^2\right)$ کدام است؟ (مدیریت ۷۵)

۱) 0.04 ۲) 0.2 ۳) 1 ۴) 2

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$E\left(x^2\right)=\sum x^2.p(x)=(-1)^2(0.3)+(0)^2(0.3)+(1)^2(0.3)+(2)^2(0.1)$$

$$E\left(x^2\right)=0.3+0.3+0.4=1$$

مثال۶: متغیر تصادفی x می‌تواند یکی از سه مقدار 5 و 4 و x_3 را انتخاب کند که احتمال آن‌ها به ترتیب 0.2، 0.5 و P_3 است. اگر میانگین متغیر تصادفی x برابر 6 باشد مقدار x_3 چقدر است؟

۱) 2 ۲) 5 ۳) 7 ۴) 10

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

x_i	4	5	x_3	
$p_i=f_i$	0.5	0.2	P_3	$\Sigma p_i=1$

$$(I)\ \Sigma p_i=1 \Rightarrow 0.5+0.2+p_3=1 \Rightarrow 0.7+p_3=1 \Rightarrow \boxed{p_3=0.3}$$

$$(II)\ E(x)=\sum x f_x(x) \Rightarrow 4(0.5)+5(0.2)+(x_3)(p_3)=6 \Rightarrow 3+x_3p_3=6$$

$$\Rightarrow 0.3x_3=3 \Rightarrow \boxed{x_3=10}$$

مثال۷: جدول احتمال متغیر تصادفی x به صورت زیر است:

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	a

امیدریاضی x کدام است؟

۱) 1   ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) 2

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

باید جمع احتمالات برابر یک شود، بنابراین:

$$\sum p(x_i)=1 \Rightarrow \frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+a=1 \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{4}}$$

$$E(x)=\Sigma x_i p(x_i) \Rightarrow E(x)=0\left(\frac{1}{6}\right)+1\left(\frac{1}{4}\right)+2\left(\frac{1}{3}\right)+3\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$E(x)=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{5}{3} \Rightarrow \boxed{E(x)=\frac{5}{3}}$$

❍ واریانس (پراش،امیدمجذورانحراف از میانگین،مجذورانحراف ازمعیار،(x) Var، (x) V، (x) D ، $(\sigma^2(x))$

واریانس متغیر تصادفی گسستهٔ x که میزان پراکندگی را حول میانگین (امیدریاضی) نشان می‌دهد.

$$\boxed{\sigma_x^2=E(x-\mu)^2=E\left(x^2\right)-\mu^2}$$

واریانس را برای دو حالت متغیر تصادفی x گسسته و متغیر تصادفی x پیوسته، به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$\mathrm{var}(x)=E\left(x^2\right)-\left(E(x)\right)^2=\sum x^2 f(x)-\mu_x^2=\sum\left[x-E(x)\right]^2 f(x)$: متغیرتصادفی x گسسته و f(x) تابع احتمال گسسته
$\mathrm{var}(x)=E\left(x^2\right)-\left(E(x)\right)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-\mu_x^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-E(x)\right]^2 f(x)dx$:متغیرتصادفیxپیوسته وf(x)تابع احتمال‌پیوسته

مثال۱: اگر میانگین و انحراف معیار x برابر 2 باشد، میانگین x^2 چقدر است؟ (اقتصاد ۸۲)

۱) 4   ۲) 8   ۳) 16   ۴) 32

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\mathrm{var}(x)=E\left(x^2\right)-\left(E(x)\right)^2 \Rightarrow 4=E\left(x^2\right)-(2)^2 \to 4=E\left(x^2\right)-4 \Rightarrow \boxed{E\left(x^2\right)=8}$$

مثال۲: تابع چگالی احتمال x به صورت $f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{c^2} & 0\le x\le c\\ 0 & \text{سایرنقاط}\end{cases}$ است. c چه مقدار باشد تا این که $\sigma_x^2=2$ گردد.

۱) $c=2$ ۲) $c=4$ ۳) $c=6$ ۴) $c=9$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\sigma_x^2 = 2 \;\Rightarrow\; E\left(x^2\right)-\left(E(x)\right)^2 = \int_0^c x^2.\frac{2x}{c^2}-\left(\int_0^c x\frac{2x}{c^2}dx\right)^2 = 2 \to \left[\frac{2x^4}{4c^2}\right]_0^c-\left(\left[\frac{2x^3}{3c^2}\right]_0^c\right)^2 = 2$$

$$\to \frac{c^2}{2}-\left(\frac{2}{3}c\right)^2 = 2 \;\to\; \frac{c^2}{2}-\frac{4c^2}{9} = 2 \to \frac{c^2}{18} = 2 \;\Rightarrow\; c^2 = 36 \;\Rightarrow\; \boxed{c = 6}$$

مثال۳: در صورتی‌که $x = -1\,,0\,,1$ برای $p(x) = \frac{|x|+1}{5}$ تابع احتمال متغیر تصادفی ناپیوسته x باشد. آن‌گاه امید ریاضی و واریانس x به ترتیب از راست به چپ برابر چیست؟

۱) 0 و $\frac{4}{5}$ ۲) 1 و $\frac{1}{5}$ ۳) 0 و $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$ و $\frac{4}{25}$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

x	-1	0	1	
$p(x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\Sigma p(x)=1$

$$E(x) = \Sigma x_i \times p\left(x_i\right) = (-1)\left(\frac{2}{5}\right)+(0)\left(\frac{1}{5}\right)+(1)\left(\frac{2}{5}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{E(x) = 0}$$

$$\sigma^2(x) = E(x)^2-\left(E(x)\right)^2 = \Sigma x_i^2 \times p\left(x_i\right)-\left(\Sigma x_i \times p\left(x_i\right)\right)^2$$

$$= \left[(-1)^2\left(\frac{2}{5}\right)+(0)^2\left(\frac{1}{5}\right)+(1)^2\left(\frac{2}{5}\right)\right]-0^2 = \frac{4}{5}-0 = \frac{4}{5} \;\Rightarrow\; \boxed{\sigma^2(x) = \frac{4}{5}}$$

● خواص واریانس

اگر a و b ثابت باشند:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sigma^2(\pm ax \pm b) = (\pm a)^2\sigma^2(x) & \Rightarrow\; \sigma(\pm ax \pm b) = |\pm a|\sigma(x) \\ \sigma^2(b) = 0 & \Rightarrow\; \sigma(b) = 0 \end{array}}$$

مثال۱: متغیرتصادفی x دارای میانگین 5 و واریانس 9 می‌باشد. میانگین و واریانس $\frac{x-5}{3}$ به ترتیب (از راست یا چپ) کدام است؟

۱) 0 و 1 ۲) 1 و 0 ۳) 5 و 3 ۴) 5 و 9

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$E\left(\frac{x-5}{3}\right) = \frac{E(x)}{3}-\frac{5}{3} = \frac{5}{3}-\frac{5}{3} = 0$$

$$\mathrm{var}\left(\frac{x-5}{3}\right) = \frac{\mathrm{var}(x)}{9} = \frac{9}{9} = 1$$