گرافیک کامپیوتری

جلسه دوم : مبانی ریاضی گرافیک کامپیوتری

مقدمه

- یک نقطه در مختصات دو بعدی با دو مولفه شناخته می شود.
- این دو مولفه را می توان با یک بردار نمایش داد.
- در مختصات سه بعدی این بردار سه مولفه دارد.
- مجموعه ای از نقاط که هر کدام از آنها دارای موقعیتی نسبت به یک دستگاه مختصات نسبی باشند در کامپیوتر به صورت ماتریس ذخیره می شود.

ماتریس تبدیلات

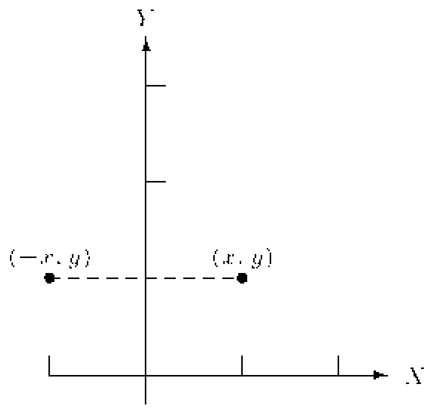
- استفاده دیگر از ماتریس ها برای تبدیلات است
- از ضرب ماتریس برای یک تبدیل هندسی بر روی مجموعه ای از نقاط که توسط بردارهای موقعیت نشان داده شده اند استفاده می شود.
- این استفاده از ضرب ماتریس به عنوان عملگر هندسی اساس تبدیلات ریاضی مورد نیاز در ترسیمات کامپیوتری است.

اعمال مقدماتی در گرافیک

- چهار عمل مقدماتی را می توان بر روی یک شکل گرافیکی انجام داد:
  - انعکاس
  - مقیاس
  - دوران
  - انتقال
- این اعمال را تبدیلات خطی می نامند.
- یک تبدیل در حالت کلی عملی است که نقطه $P(x,y)$ را به نقطه $P^*(x^*,y^*)$ تبدیل می کند.
- کلمه خطی به آن خاطر است که تبدیل یک خط راست باز هم یک خط راست است.

انعکاس

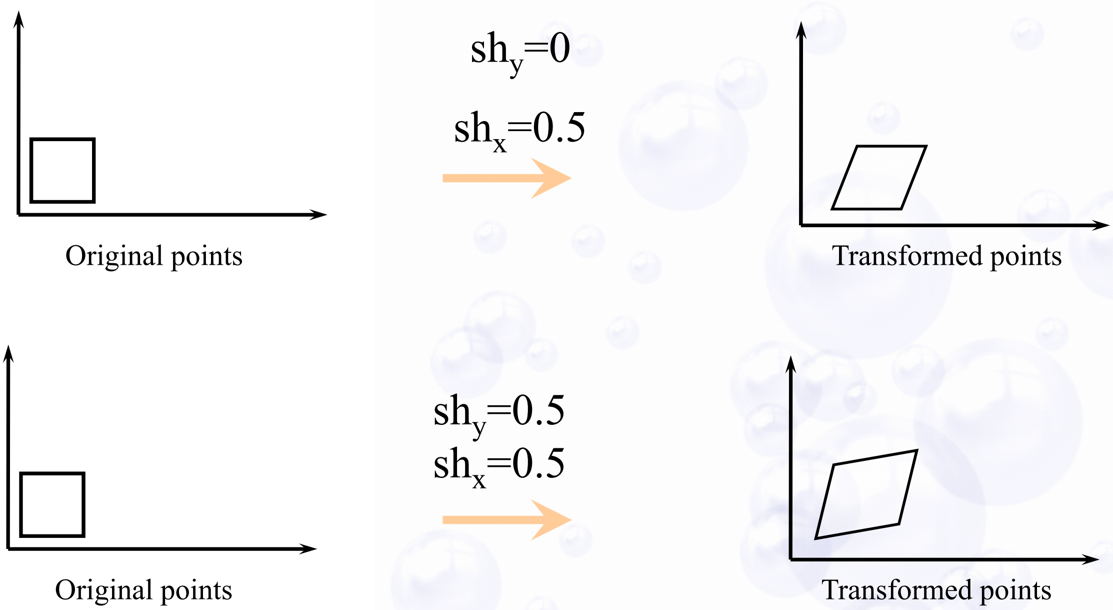
- انعکاس نسبت به محور y ها



$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & y \end{bmatrix}$$

- اگر در تبدیل فوق از ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ استفاده شود، انعکاس نسبت به محور x ها خواهد بود.

تغییر شکل برشی(Shearing)



تغییر شکل برشی (Shearing)

- تغییر شکل برشی در جهت خاصی (محور x یا y) تاثیر می گذارد.
- اثر این تغییر شکل شبیه هل دادن شکل
- تغییر شکل در راستای x به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x + hP_y \\ P_y \end{bmatrix}$$

- میزان h معین می کند چه کسری از y بایستی به x اضافه شود. که می تواند منفی یا مثبت باشد.
- به طور عام: تغییر شکل در هر دو جهت به صورت زیر می تواند باشد.

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & sh_y & 0 \\ sh_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix}$$

مقیاس

- مقیاس تبدیلی است که طی آن نقطه ای مانند p(x,y) را با ضرب کردن مختصات x, y به ضرایب غیر صفر a,b به p’(x’,y’)

$$x' = ax, \qquad y' = by.$$

- اگر ضرایب مقیاس با هم برابر باشد مقیاس یکنواخت گویند.

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & y \end{bmatrix}$$

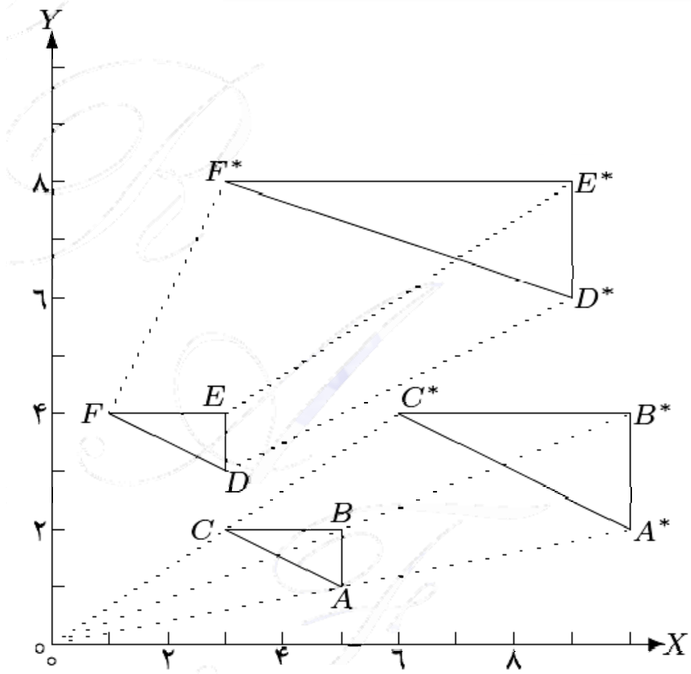
- اگر a>1 مختصات نقطه در راستای محور x به مقیاس a بزرگ خواهد شد.
- اگر a منفی باشد عمل مقیاس و انعکاس همزمان صورت می گیرد.

مقیاس

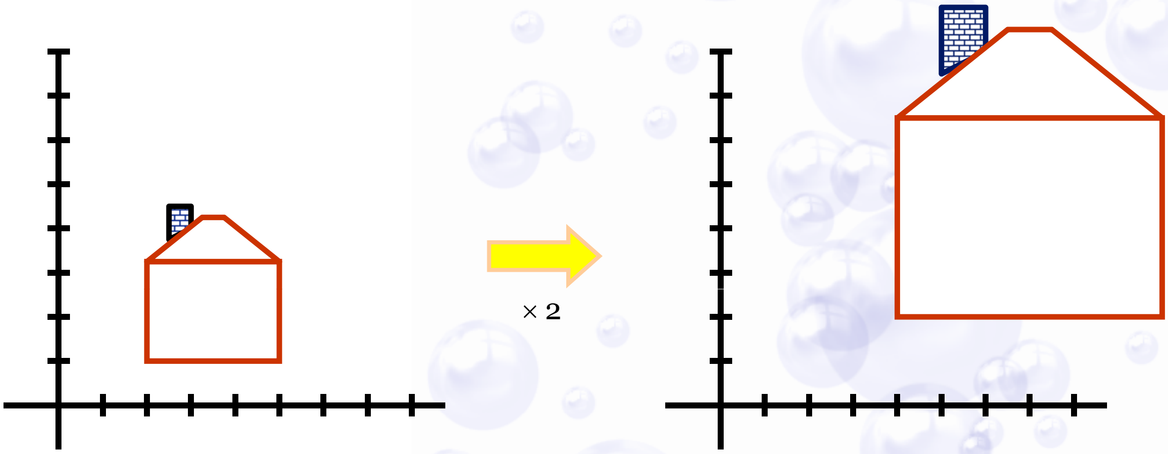
$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & y \end{bmatrix}$$

- اگر 0<a<1 باشد مختصات نقطه در راستای محور x کوچک می شود.
- اگر عنصر واقع در سطر و ستون دوم نیز عددی به غیر از یک باشد، عمل مقیاس در راستای محور y ها نیز انجام می شود.

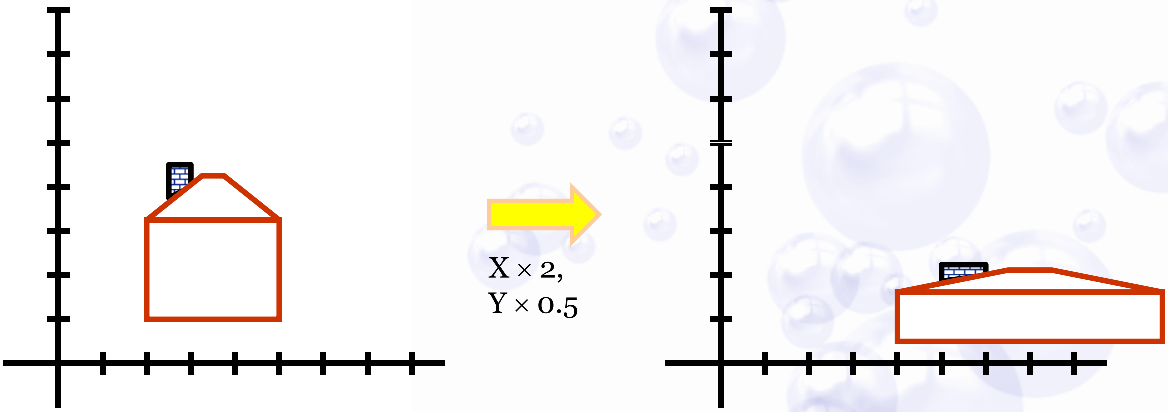
مقیاس یکنواخت و غیر یکنواخت



مقیاس یکنواخت



مقیاس غیر یکنواخت



مقیاس یکنواخت و غیر یکنواخت

- دو مثلث DEF و ABC با مختصات

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۱ \\ ۵ & ۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} \quad و \quad \begin{bmatrix} ۳ & ۳ \\ ۳ & ۴ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

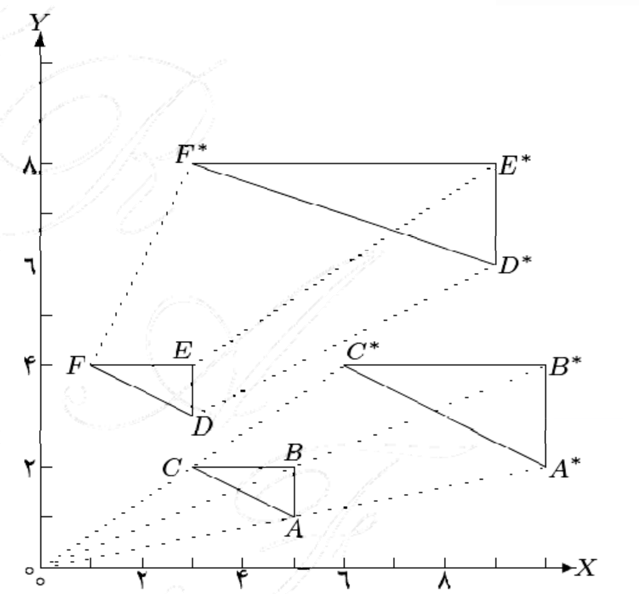
- در ماتریس های مقیاس

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \quad و \quad \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

- ضرب شده که در نتیجه مثلثهای DEF و ABC با مختصات

$$\begin{bmatrix} ۱۰ & ۲ \\ ۱۰ & ۴ \\ ٦ & ۴ \end{bmatrix} \quad و \quad \begin{bmatrix} ۹ & ٦ \\ ۹ & ۸ \\ ۳ & ۸ \end{bmatrix}$$

مقیاس یکنواخت و غیر یکنواخت



- همانطور که در شکل نیز مشخص است تبدیل دوم نسبت اضلاع مثلث را به هم زده است.

- علت این مسئله نابرابر بودن اعضای قطری ماتریس تبدیل بوده است

دوران حول مبداء

- در اینجا دوران حول مبداء مختصات انجام می شود.
- دوران حول مبدا O به اندازه زاویه θ نقطه p(x,y) را به نقطه p'(x',y') می نگارد به طوریکه فاصله هر دو نقطه از مبدا برابر است.

- زاویه بین خطوط $\overline{op'}$ و $\overline{op}$ برابر θ می باشد.

- دوران با استفاده از ماتریس زیر بیان می شود.

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

انتقال

- اگر بخواهیم مختصات نقطه ای مانند p(x,y) را در راستای محور x ها به اندازه m واحد انتقال دهیم نقطه p'(x+m,y) بدست خواهد آمد.
- معادله زیر برقرار خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+m & y \end{bmatrix}$$

- با توجه به آنکه در مولفه اول y وجود ندارد ← c=0
- با توجه به آنکه در مولفه دوم x وجود ندارد ← b=0
- y در مولفه دوم دارای ضریب ۱ است ← d=1

$$a = \frac{x+m}{x}$$

انتقال (ادامه)

- مقادیر بدست آمده حاکی از آن است که این ماتریس برای انتقال نقطه دیگری کاربرد نخواهد داشت
- مثلا برای انتقال پاره خط تمام نقاط آن را بایستی انتقال داد که عاقلانه نیست.
- لذا در مختصات دو بعدی ماتریس ۲*۲ برای انتقال که مستقل از نقطه باشد وجود ندارد.

انتقال (ادامه)

- از یک ماتریس ۳*۳ به جهت عملگر انتقال استفاده میکنیم
- برای سازگاری مختصات نقاط با ماتریس تبدیل نیز یک مولفه به نقاط اضافه می شود.
- برای نمایش نقطه p(x,y) از سه تایی مرتب p(x,y,h) استفاده می شود.
- ماتریس انتقال به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b & ۰ \\ c & d & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

انتقال (ادامه)

- از یک ماتریس ۳*۳ به جهت عملگر انتقال استفاده میکنیم

- برای سازگاری مختصات نقاط با ماتریس تبدیل نیز یک مولفه به نقاط اضافه می شود.

- برای نمایش نقطه p(x,y) از سه تایی مرتب p(x,y,h) استفاده می شود.

انتقال (ادامه)

- ماتریس های تبدیل به صورت زیر تغییر می کند

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ماتریس انتقال نیز به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix}$$

- که m و n اندازه انتقال در راستای محور x و y خواهد بود.

مختصات همگن

- مختصات همگن برای انعطاف پذیری و نمایش یکنواخت نقاص فضا، در گرافیک کامپیوتری استفاده می شود.
- شکل خاصی از مختصات همگن قبلا در ساخت ماتریس تبدیلات استفاده شد.
- مختصات همگن نقاط را در فضایی که دارای یک بعد بیشتر از فضای اصلی است نمایش می دهد.
- بعنوان مثال نمایش همگن نقاط و اعمال در فضای دو بعدی، نقاطی با سه مولفه و ماتریسهایی 3*3 بودند.

تبدیلات در مختصات همگن

انتقال

- ماتریس انتقال در مختصات همگن به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ h & k & ۱ \end{bmatrix}$$

- بنابراین:

$$\begin{bmatrix} x & y & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ m & n & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+m & y+n & ۱ \end{bmatrix},$$

- که ثابت می کند این ماتریس نقطه (x,y) را به (x+m,y+n) منتقل می کند.

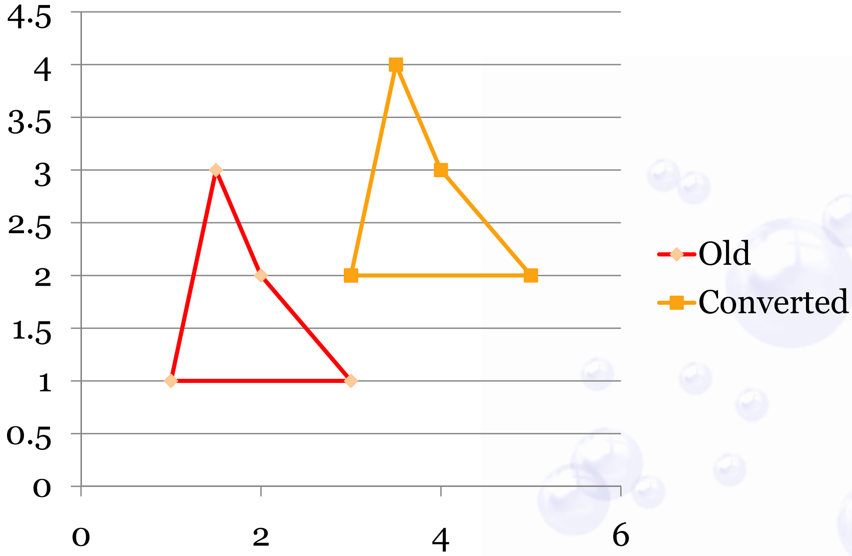
انتقال (مثال)

- مثال ۳.۲ : یک چهارضلعی با مختصات $A(۱.۱)$، $B(۳.۱)$، $C(۲.۲)$ و $D(۱/۵.۳)$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم این چهارضلعی را به اندازه دو واحد در راستای محور x و یک واحد در راستای محور y انتقال دهیم. در مختصات همگن این چهار رأس بصورت یک ماتریس ۳×۴ نمایش داده می‌شود. عمل انتقال با ضرب ماتریس رئوس به ماتریس انتقال انجام می‌شود. سطرهای ماتریس حاصل مختصات همگن رئوس تصویر انتقال یافته است.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۱ \\ ۱/۵ & ۳ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۵ & ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ & ۱ \\ ۳/۵ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}.$$

بنابراین تصویر حاصل دارای مختصات رئوس $A'(۳.۲)$، $B'(۵.۲)$، $C'(۴.۳)$ و $D'(۳/۵.۴)$ است.

انتقال (مثال)



$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۱ \\ ۱/۵ & ۳ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۵ & ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ & ۱ \\ ۳/۵ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}.$$

بنابراین تصویر حاصل دارای مختصات رئوس $A'(۳.۲)$، $B'(۵.۲)$، $C'(۴.۳)$ و $D'(۳/۵.۴)$ است.

مقیاس

- ماتریس مقیاس همگن عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} S_x & ۰ & ۰ \\ ۰ & S_y & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

- بنابراین:

$$\begin{bmatrix} x & y & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_x & ۰ & ۰ \\ ۰ & S_y & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x x & S_y y & ۱ \end{bmatrix}$$

- که ثابت می کند نقطه (x,y,1) به نقطه $(S_x x, S_y y, 1)$ تبدیل شده است.

مقیاس (مثال)

- مثال ۴.۲ : مثلث با مختصات همگن زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۱ & ۱ \\ ۵ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}.$$

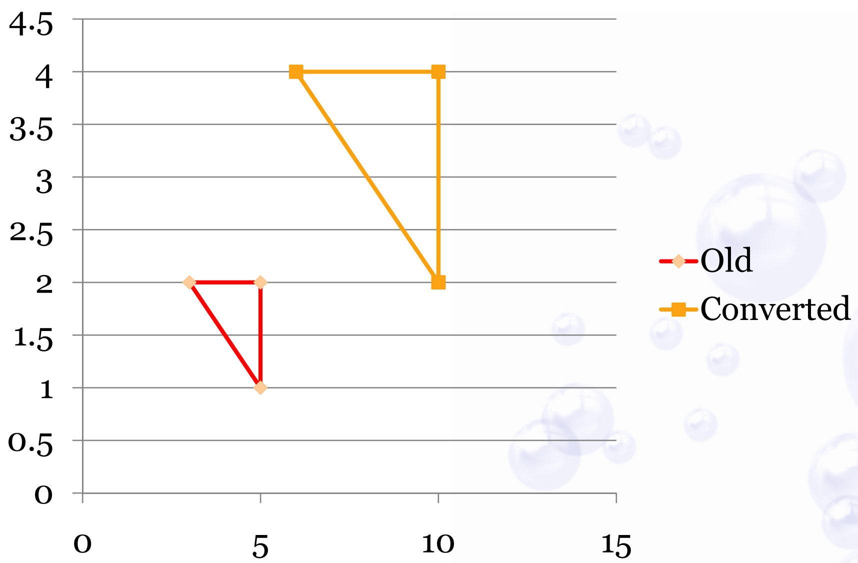
می‌خواهیم مثلثی را به دست بیاوریم که از اِعمال تبدیل مقیاس زیر در این مثلث به دست آمده باشد

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

بنابراین داریم

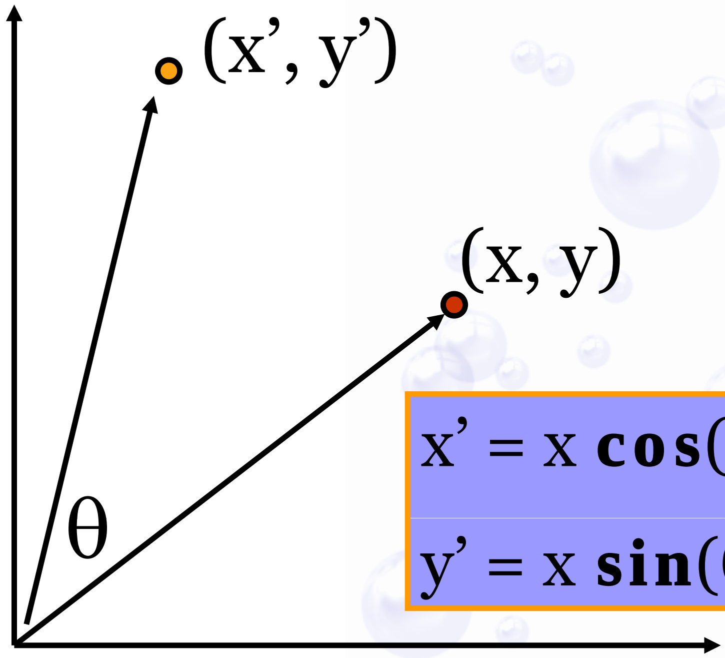
$$\begin{bmatrix} ۵ & ۱ & ۱ \\ ۵ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۰ & ۲ & ۱ \\ ۱۰ & ۴ & ۱ \\ ٦ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}.$$

مقیاس (مثال)



$$\begin{bmatrix} ۵ & ۱ & ۱ \\ ۵ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۰ & ۲ & ۱ \\ ۱۰ & ۴ & ۱ \\ ٦ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}.$$

2-D Rotation



$$x' = x\,\mathbf{cos}(\theta) - y\,\mathbf{sin}(\theta)$$

$$y' = x\,\mathbf{sin}(\theta) + y\,\mathbf{cos}(\theta)$$

دوران حول مبداء

- در مختصات همگن دوران حول مبداء به اندازه زاویه θ عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- زاویه مثبت دوران در جهت خلاف عقربه های ساعت است.
- بنابراین:

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta & x\sin\theta + y\cos\theta & 1 \end{bmatrix}$$

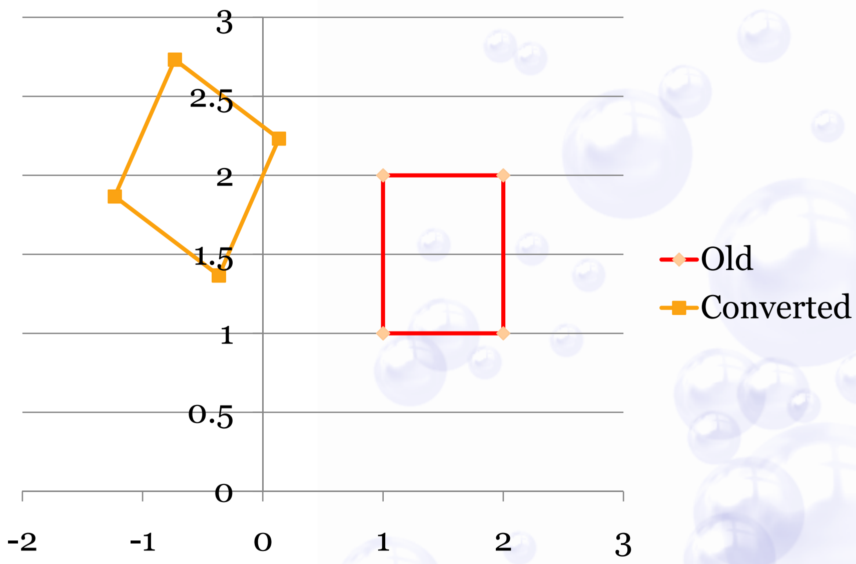
دوران حول مبداء

• مثال ۵.۲ : ماتریس دوران در جهت خلاف عقربه‌های ساعت به اندازه زاویه $\pi/۳$ روی مربع واحد به مختصات (۱.۱)، (۲.۱)، (۲.۲) و (۱.۲) بصورت زیر تعیین می‌شود

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰٫۵ & ۰٫۸۶۶ & ۰ \\ -۰٫۸۶۶ & ۰٫۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۰٫۳۶۶ & ۱٫۳۶۶ & ۱ \\ ۰٫۱۳۴ & ۲٫۲۳۲ & ۱ \\ -۰٫۷۳۲ & ۲٫۷۳۲ & ۱ \\ -۱٫۲۳۲ & ۱٫۸۶۶ & ۱ \end{bmatrix}.$$

بنابراین تصویر حاصل مربعی با مختصات (−۰٫۳۶۶.۱٫۳۶۶)، (۰٫۱۳۴.۲٫۲۳۲)، (−۰٫۷۳۲.۲٫۷۳۲) و (−۱٫۲۳۲.۱٫۸۶۶) است.

دوران حول مبداء



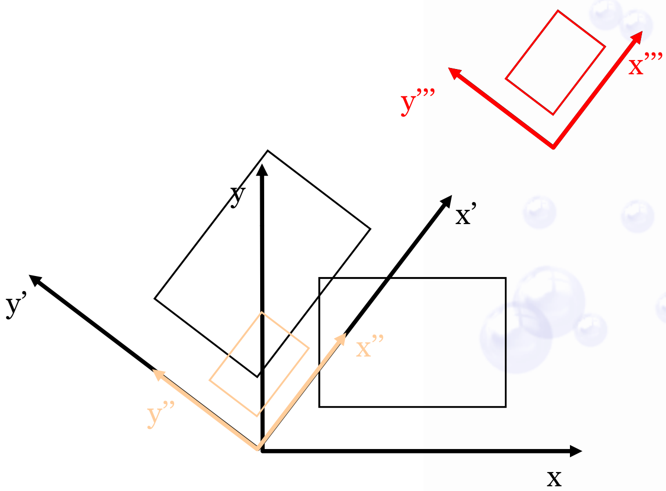
اعمال دو تبدیل خطی روی یک شکل

- در مختصات همگن اعمال دو تبدیل خطی روی یک شکل متناظر با حاصلضرب ماتریس های تبدیل آنهاست.

- مثال: ابتدا می خواهیم به اندازه θ شکلی را حول مبدا دوران دهیم و سپس به اندازه m واحد در راستای محور x انتقال دهیم می توانیم از ماتریس زیر استفاده کنیم:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ m & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

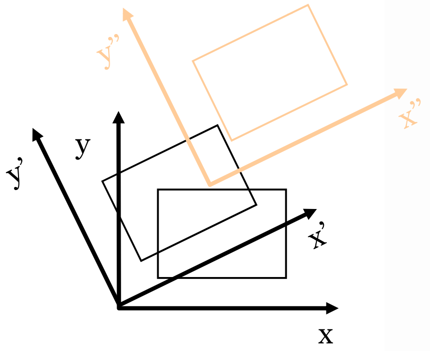
تبدیلات متوالی

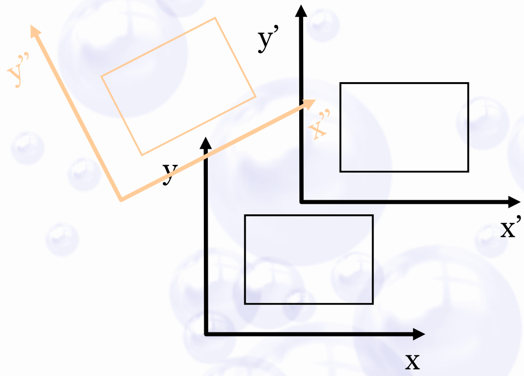


$$\mathbf{x}' = \mathrm{R}(\pi/2)\mathbf{x}$$
$$\mathbf{x}'' = \mathrm{S}(1/2)\mathbf{x}'$$
$$\mathbf{x}''' = \mathrm{T}(5,4)\mathbf{x}''$$
or
$$\mathbf{x}''' = \mathrm{M}\mathbf{x}, \text{ with}$$
$$\mathrm{M} = \mathrm{T}(5,4)\mathrm{S}(1/2)\mathrm{R}(\pi/2)$$

این امکان وجود دارد که نتیجه تبدیلات متوالی را به صورت یک ماتریس تبدیل واحد که تلفیق همه تبدیلات است نمایش داد.

ترتیب تبدیلات





$\mathbf{x}'' = T(2,3)R(30)\mathbf{x}$

$\mathbf{x}'' = R(30)T(2,3)\mathbf{x}$

ضرب ماتریس ها خاصیت جابجایی ندارد، لذا ترتیب های متفاوت نتیجه متفاوت خواهند داشت.

دوران حول نقطه دلخواه

- تبدیل خطی دوران به اندازه زاویه θ حول نقطه دلخواه (x_o,y_o) از سه تبدیل زیر تشکیل شده است:
  - نقطه (x_o,y_o) را به مبدا انتقال می دهیم
  - دوران به اندازه زاویه θ را انجام می دهیم
  - بازگرداندن نقطه
- لذا ماتریس متناظر با این دوران به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & -y_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ (-x_0\cos\theta + y_0\sin\theta + x_0) & (-x_0\sin\theta - y_0\cos\theta + y_0) & 1 \end{bmatrix}$$

دوران حول نقطه دلخواه (مثال)

به عنوان مثال فرض کنید می‌خواهیم مربعی با مختصات رئوس $A(۱.۱)$، $B(۲.۱)$، $C(۲.۲)$ و $D(۱.۲)$ را به اندازهٔ $\pi/۴$ حول نقطهٔ B دوران دهیم. برای به دست آوردن مختصات چهارضلعی حاصل ابتدا باید نقطهٔ B را به مبدأ منتقل کرده، سپس به اندازهٔ $\pi/۴$ دوران داده و مجدداً مبدأ را به نقطهٔ B باز گردانیم. بنابراین ماتریس دوران حول نقطهٔ B به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۲ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰٫۷۰۷۱ & ۰٫۷۰۷۱ & ۰ \\ -۰٫۷۰۷۱ & ۰٫۷۰۷۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۰٫۷۰۷۱ & ۰٫۷۰۷۱ & ۰ \\ -۰٫۷۰۷۱ & ۰٫۷۰۷۱ & ۰ \\ ۱٫۲۹۲۹ & -۱٫۱۲۱۳ & ۱ \end{bmatrix}.$$

دوران حول نقطه دلخواه (مثال)

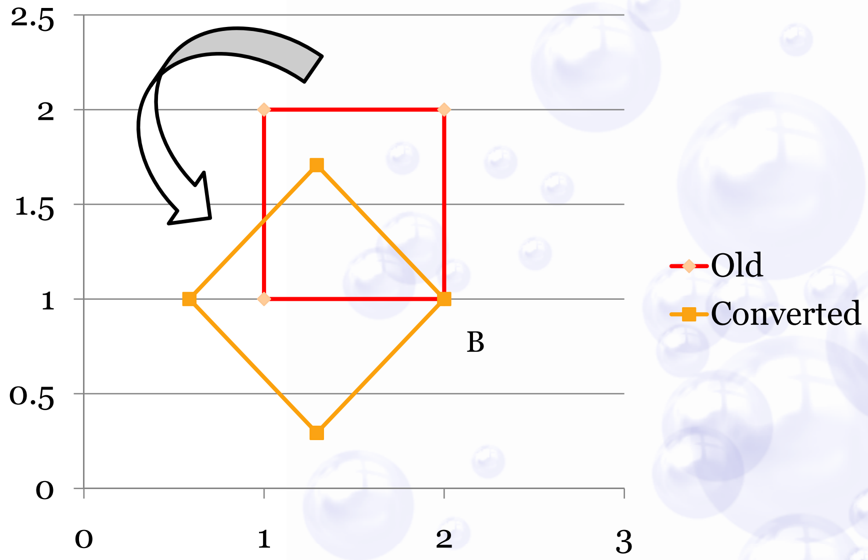
- با ضرب مختصات رئوس در ماتریس حاصل داریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰٫۷۰۷۱ & ۰٫۷۰۷۱ & ۰ \\ -۰٫۷۰۷۱ & ۰٫۷۰۷۱ & ۰ \\ ۱٫۲۹۲۹ & -۱٫۱۲۱۳ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱٫۲۹۲۹ & ۰٫۲۹۲۹ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱٫۲۹۲۹ & ۱٫۷۰۷۱ & ۱ \\ ۰٫۵۸۵۸ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}.$$

بنابراین مختصات چهارضلعی حاصل عبارتند از $A'(۱٫۲۹۲۹.۰٫۲۹۲۹)$، $B'(۲.۱)$، $C'(۱٫۲۹۲۹.۱٫۷۰۷۱)$ و $D'(۰٫۵۸۵۸.۱)$.

دوران حول نقطه دلخواه (مثال)

- با ضرب مختصات رئوس در ماتریس حاصل داریم:



انعکاس نسبت به یک خط دلخواه

- انعکاس نسبت به محور های x و y را قبلا بدست آوردیم
- انعکاس نسبت به خط دلخواه $ax+by+c=0$ به صورت زیر می باشد:
  - تبدیل خط مذکور به یکی از محورها
  - انعکاس نسبت به آن محور
  - تبدیل معکوس تبدیل اول
- فرض کنید $b\neq 0$ ← محل تقاطع این خط با محور y نقطه $(0,-c/b)$
- ابتدا نقطه فوق را به مبدا منتقل می کنیم
- خط حاصل از مبدا می گذردو با همان شیب خط اصلی $(\tan\theta = -a/b)$
- θ زاویه بین خط و محور x است

انعکاس نسبت به یک خط دلخواه (ادامه)

- با دوران به اندازه $-\theta$ خط مربوطه به روی محور x نگاشته می شود.
- حال تبدیل انعکاس نسبت به محور x انجام می شود.
- معکوس دوران را انجام می دهیم که دوران به اندازه θ می باشد.
- مبدا را به نقطه (0,-c/b)

انعکاس نسبت به یک خط دلخواه (ادامه)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c/b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c/b & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta & 0 \\ 2\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta & 0 \\ 2\frac{c}{b}\sin\theta\cos\theta & \frac{c}{b}(\sin^2\theta - \cos^2\theta - 1) & 1 \end{bmatrix}.$$

تبدیلات 3D

$$[x \quad y \quad z \quad 1]\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x' \quad y' \quad z' \quad 1]$$

مقیاس

$$[x \quad y \quad z \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x' \quad y' \quad z' \quad 1]$$

بدون تغییر

$$[x \quad y \quad z \quad 1]\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x' \quad y' \quad z' \quad 1]$$

انعکاس نسبت به صفحه Y/Z

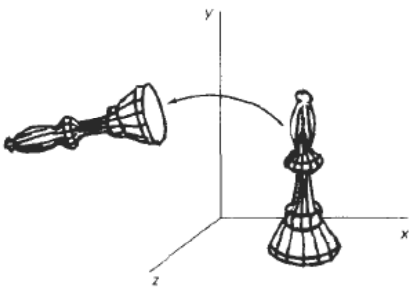
$$[x \quad y \quad z \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{bmatrix} = [x' \quad y' \quad z' \quad 1]$$

انتقال

تبدیلات سه بعدی (3D)

دوران حول محور z

$$[x \quad y \quad z \quad 1]\begin{bmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta & 0 & 0 \\ -\sin\Theta & \cos\Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x' \quad y' \quad z' \quad w]$$

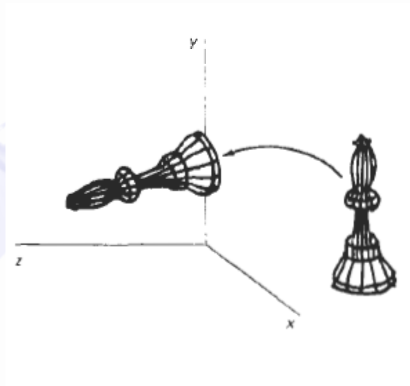


$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$
$$z' = z$$

دوران سه بعدی

دوران حول محور X

$$[x \quad y \quad z \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & \sin\Theta & 0 \\ 0 & -\sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x' \quad y' \quad z' \quad w]$$



دوران حول محور X

$$y' = y\cos\theta - z\sin\theta$$
$$z' = y\sin\theta + z\cos\theta$$
$$x' = x$$

$$x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$$

$$\Longrightarrow$$

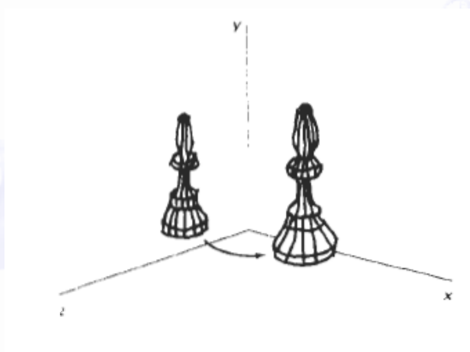
دوران حول محور Z

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$
$$z' = z$$

دوران سه بعدی

دوران حول محور y

$$[x \quad y \quad z \quad 1]\begin{bmatrix} \cos\Theta & 0 & -\sin\Theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\Theta & 0 & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x' \quad y' \quad z' \quad w]$$



دوران حول محور y

$$z' = z\cos\theta - x\sin\theta$$
$$x' = z\sin\theta + x\cos\theta$$
$$y' = y$$

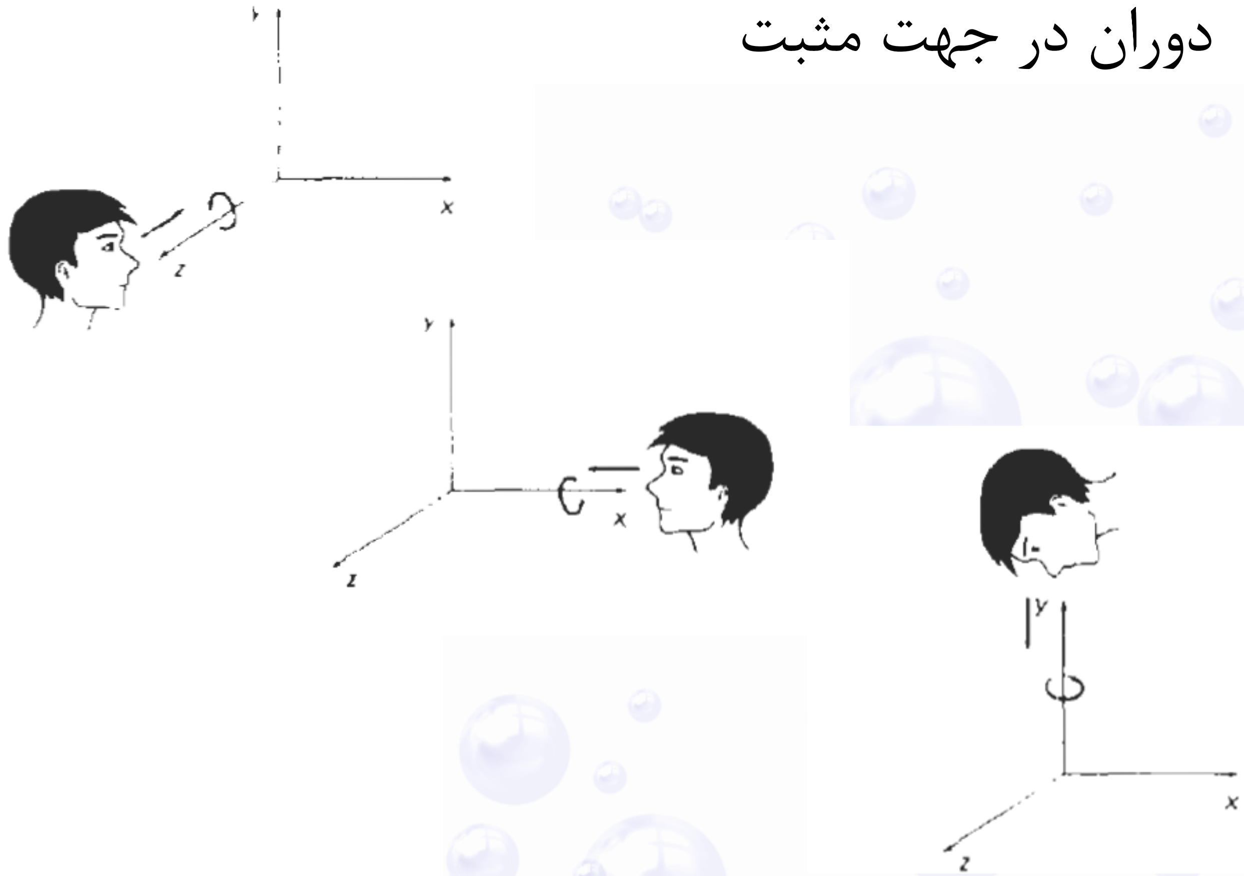
$$x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$$

$$\Longrightarrow$$

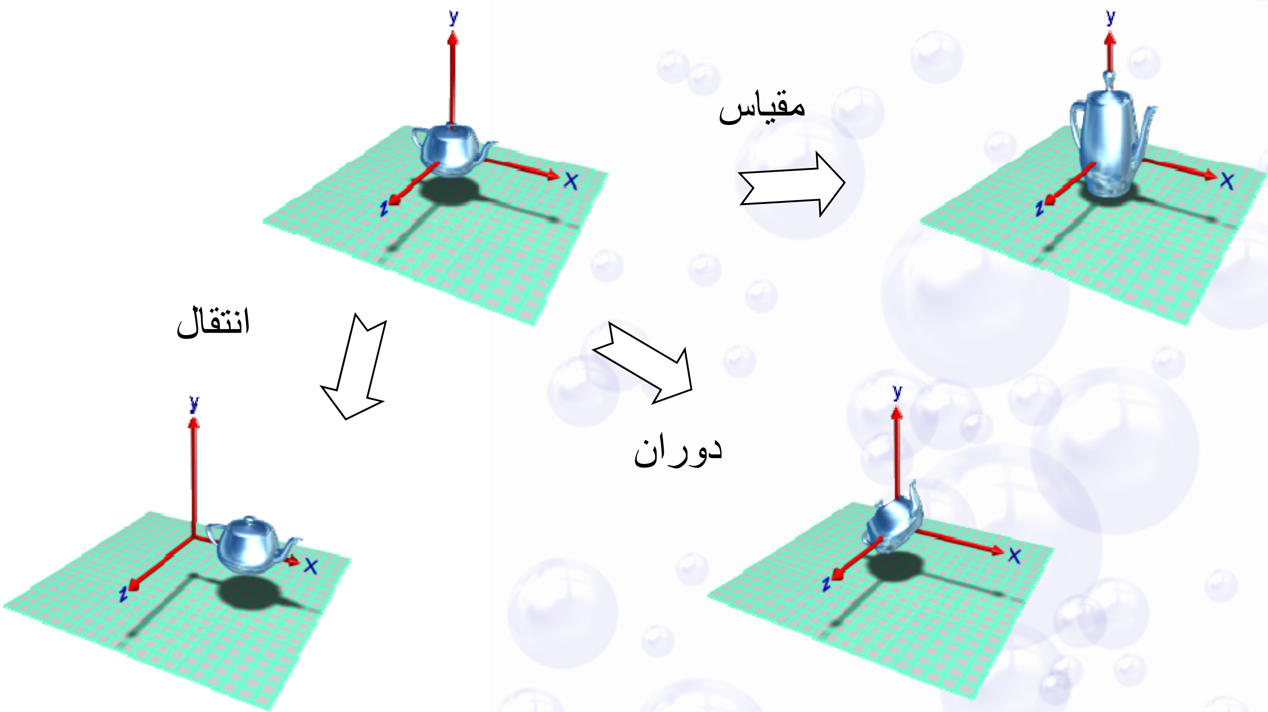
دوران حول محور X

$$y' = y\cos\theta - z\sin\theta$$
$$z' = y\sin\theta + z\cos\theta$$
$$x' = x$$

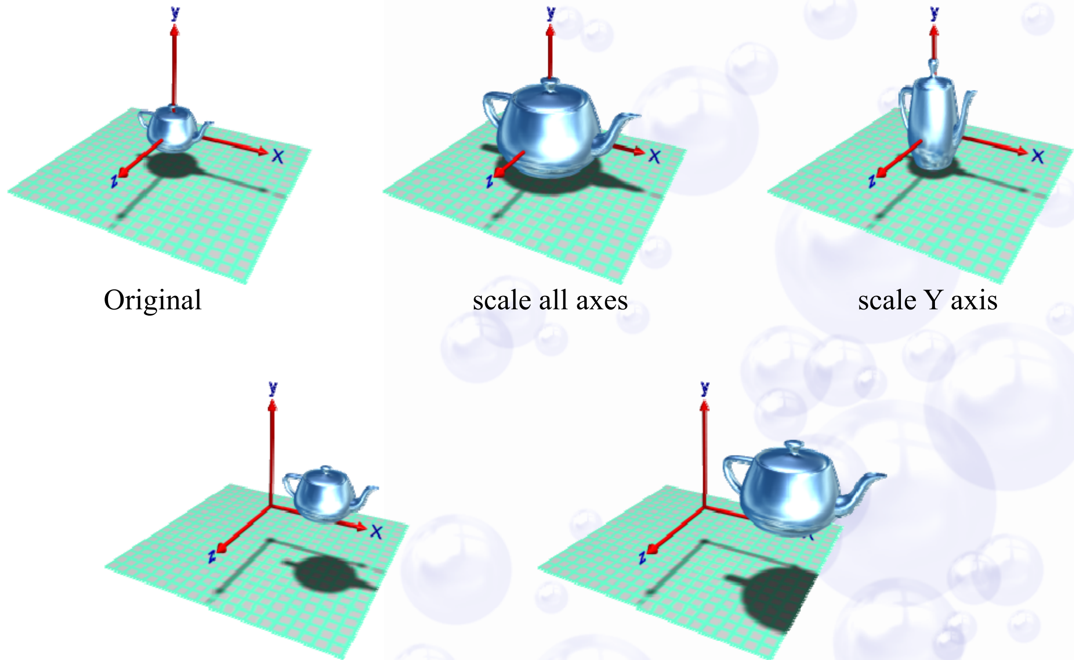
دوران در جهت مثبت



تبدیلات سه بعدی (3D)



تبدیلات سه بعدی (3D)



Original

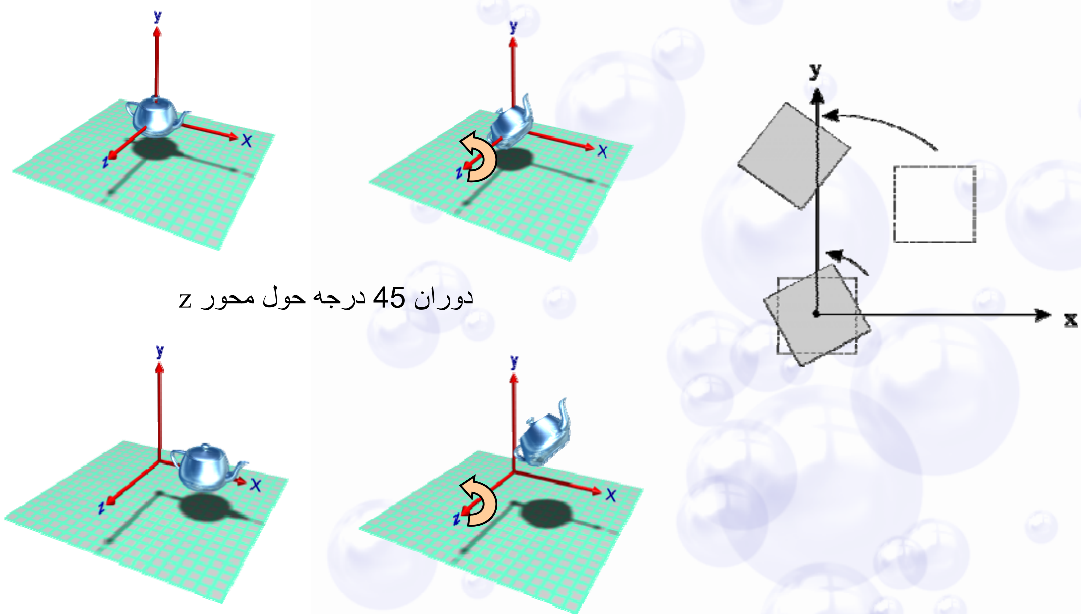
scale all axes

scale Y axis

offset from origin

distance from origin also scales

تبدیلات سه بعدی (3D)



دوران 45 درجه حول محور z