۳)

$$N(x,y) = -x + y + ۲ \quad , \quad M(x,y) = x - y$$

$M_y = -۱ = N_x \quad \Rightarrow$ معادله کامل است

$$f(x,y) = \int_{y_\circ}^{y} N(x,s)ds + \int_{x_\circ}^{x} M(t,y)dt$$

$$= \int_{\circ}^{y} (-\circ + s + ۲)ds + \int_{\circ}^{x} (t - y)dt$$

$$= \left(\frac{y^۲}{۲} + ۲y \right) + \left(\frac{x^۲}{۲} - xy \right) = c$$

۴)

$$N(x,y) = e^y \sin x + y^۲ \quad , \quad M(x,y) = e^x \cos y - x^۲$$

$$M_y = -e^x \sin y \quad , \quad N_x = e^y \cos x$$

$M_y \neq N_x \quad \Rightarrow$ معادله کامل نیست

۲ . ۵) عامل انتگرال ساز (معادلات غیرکامل)

هرگاه معادله $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ کامل نباشد در برخی از موارد می توان با ضـرب یـک عامل به طرفین معادله آن را به معادله دیفرانسیل کامل تبدیل کرد که این عبارت را عامل انتگـرال ساز می نامیم.

اگر μ یک عامل انتگرال ساز و معادله فوق غیرکامل باشد معادله زیر کامل خواهد بود:

$$\mu M dx + \mu N dy = 0$$

۱) هرگاه $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$ باشند (جواب بر حسب x) :

$\mu = e^{\int f(x)dx}$ عامل انتگرال ساز

در این حالت تابعی μ از x است.

۲) هرگاه $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}=g(y)$ $-$ باشد (بر حسب y) :

$\mu = e^{\int g(y)dy}$ عامل انتگرال ساز

در این حالت μ تابعی از y است.

دو حالت فوق بیشترین اهمیت را در تعیین عامل انتگرال ساز دارند.

مثال) عامل انتگرال ساز معادله $y'=e^{2x}+y-1$ کدام است؟

$$\left(e^{2x}+y-1\right)dx-dy=0$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{1-0}{-1}=-1 \Rightarrow \mu=e^{-x}$$

۲ . ۶) معادلات دیفرانسیل خطی :

مهمترین نوع معادلات دیفرانسیل معادلات خطی هستند که در آنها مشتق بالاترین مرتبه تابعی خطی از مشتقات مراتب پایین تر است. بنابراین شکل کلی معادلۀ خطی مرتبه اول بصورت زیر است :

$$y'+p(x)y=q(x)$$

هرگاه $q(x)=0$ باشد معادله همگن و

اگر $q(x)\neq 0$ معادله ناهمگن است.

معادلات خطی مرتبه اول همگن به سادگی به معادلات جدایی پذیر تبدیل شده و حل می شوند :

$$y'+p(x)y=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-p(x)y \Rightarrow \frac{dy}{dy}=-p(x)dx$$

که با انتگرال گیری از طرفین معادله فوق می توان به جواب رسید.

$$y=ce^{-\int p(x)dx}$$

جواب معادلات خطی مرتبه اول غیرهمگن به صورت زیر است :

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+c\right]$$ مهم

توجه شود که عامل انتگرال ساز معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی عبارت است از :

$$\mu=e^{\int p(x)dx}$$

مثال) جواب کلی معادله $y'+y=\sin x$ را بدست آورید؟

حل) معادله فوق یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی است.

$$p(x)=1 \qquad , q(x)=\sin x \qquad \Rightarrow$$

$$y=e^{-\int dx}\left[\int \sin x e^{\int dx}dx+c\right]=e^{-x}\left[\int e^{x}\sin x dx+c\right]$$

$$e^{-x}\left[\frac{1}{2}e^{x}(\sin x-\cos x)+c\right]=ce^{-x}+\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)$$

- هرگاه معادله دیفرانسیل مرتبه اول نسبت به x به صورت تابعی از یک معادله خطی باشـد

یعنی :

$$\frac{dx}{dy}+p(y)x=q(y) \qquad \text{یا} \qquad x'+p(y)x=q(x)$$

جواب معادله به صورت زیر خواهد بود :

$$x=e^{-\int p(y)dy}\left[\int q(y)e^{\int p(y)dy}dy+c\right]$$

که نشان می دهد که جای y,x عوض شده است.

- معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را درنظر می گیریم :

$$g'(y)\frac{dy}{dx}+g(y)p(x)=q(x)$$

با تغییر متغیر $z=g(y)$ معادله فوق را می توان به معادله مرتبه اول خطی برحسب z تبدیل کرد :

$$z=g(y)\Rightarrow z'=g'(y)\frac{dy}{dx}$$

$z'+p(x)z=q(x)$ معادله مرتبه اول خطی

معادلات خطی

در تمرینات زیر معادلاتی را که خطی هستند مشخص کرده و آن‌ها را حل کنید:

۱- $y' + y\cot x = \dfrac{1}{\sin x}$

۲- $yy' - 7y = 6x$

۳- $(x^2 + y^2)dx - 2xy\,dy = 0$

۴- $(\sin^2 x - y)dx - \tan x\,dy = 0$

۳)

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$$ خطی نیست

۴) $$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{\sin^2 x - y}{tgx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + y\cot x = \sin x \cos x$$

$$P(x) = \cot x \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = e^{\int P(x)dx} = \sin x \quad \left(\int \cot u\,du = \ln \sin u\right)$$

$$y = \frac{1}{\sin x}\left[\int \sin^2 x \cos x + c\right] = \frac{\frac{1}{3}\sin^3 x + c}{\sin x} = \frac{1}{3}\sin^2 x + \frac{c}{\sin x}$$

➢ حل:

۱) $$P(x) = \cot x \qquad q(x) = \frac{1}{\sin x}$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\ln \sin x} = \sin x$$

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int q(x)\mu(x)dx + c\right] = \frac{1}{\sin x}\left[\int\left(\frac{1}{\sin x}\right)(\sin x)dx + c\right] = \frac{(x+c)}{\sin x}$$

$$\Rightarrow \quad y\sin x - x = c$$

۲) خطی نیست.

۲ . ۷ . ۱) معادله برنولی :

شکل کلی معادله برنولی به صورت زیر است :

$$y'+p(x)y=y^n q(x) \qquad n\neq 0,1$$

در حالتی که $n=0$ باشد معادله، معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی و در حالتی که $n=1$ باشد معادله، معادله جدایی پذیر خواهد بود.

برای حل معادله فوق ابتدا طرفین را بر y^n تقسیم می کنیم :

$$y^{-n}y'+y^{1-n}p(x)=q(x)$$

با تغییر متغیر $V=y^{1-n}$ داریم :

$$V=y^{1-n}\Rightarrow \frac{dv}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \qquad \text{یا} \qquad V'=(1-n)y^{-n}y'$$

با جایگذاری در معادله اصلی :

$$\frac{1}{1-n}v'+vp(x)=q(x)$$

$$v'+(1-n)p(x)v=(1-n)q(x)$$

که معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول است.

- عامل انتگرال ساز از معادله برنولی عبارت است از :

$$\mu=e^{(1-n)\int p(x)dx}$$

معادلات برنولی

جواب عمومی معادلات برنولی زیر را پیدا کنید:

۱- $y(6y^2 - x - 1)dx + 2xdy = 0$

۲- $x(1 - x^2)y' + (2x^2 - 1)y = x^3y^2$

۳- $\dfrac{dy}{dx} = y\cot x + \dfrac{y^2}{\sin x}$

۴- $y' - 2xy = 4xy^{\frac{1}{2}}$